Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN ĐỨC ĐOÀN

GIẢI SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN-ĐẠI SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN ĐỨC ĐOÀN

GIẢI SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN-ĐẠI SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS ĐÀO THỊ LIÊN

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu do tôi thực hiện. Các số liệu, kết luận nghiên cứu trình bày trong luận văn này là trung thực và chưa được công bố ở các nghiên cứu khác.

Tôi xin chịu trách nhiệm về nghiên cứu của mình.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2015

Tác giả

TRẦN ĐỨC ĐOÀN

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại khoa Toán, trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của TS Đào Thị Liên. Qua đây, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô giáo - TS Đào Thị Liên, người hướng dẫn khoa học, người đã gợi ý đề tài, định hướng nghiên cứu và tận tình hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình nghiên cứu thực hiện luận văn.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo công tác tại Viện Toán học Việt Nam; khoa Toán, Phòng Đào tạo (Bộ phận quản lý Sau đại học) Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô đã tạo mọi điều kiện trang bị cho tác giả về kiến thức, về học liệu và kinh nghiệm nghiên cứu cũng như mọi thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này.

Tác giả cũng gửi lời cảm ơn chân thành đến gia đình, các bè bạn gần xa đặc và các bạn trong lớp Cao học Toán K21A, đã luôn động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Do thời gian nghiên cứu và năng lực bản thân còn nhiều hạn chế, bản luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu, sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 03 năm 2015

Tác giả

Trần Đức Đoàn

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN i
LỜI CẢM ƠN ii
MỤC LỤC iii
DANH MỤC CÁC BẢNG iv
MỞ ĐẦU 1
Chương 1. KIẾN THỨC CƠ SỞ 2
1.1. Giới thiệu chung về phương trình vi phân đại số 2
1.1.1. Chỉ số hệ phương trình vi phân-đại số 2
1.1.2. Hệ với chỉ số 1 3
1.1.3. Hệ với chỉ số 2 5
1.1.4. Hệ với chỉ số 3 10
1.1.5. Con lắc 11
1.1.6. Các bài toán nhiễu suy biến 11
1.1.7. Hệ nhiễu suy biến đơn 13
1.1.8. Các định nghĩa khác về chỉ số 14
1.2. Giải số hệ phương trình vi phân thường cấp một bằng phương pháp RUNGER-KUTTA 17
Chương 2. GIẢI SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ CẤP 1 BẰNG PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA 22
2.1. Giải số hệ phương trình vi phân -đại số cấp 1 bằng phương pháp RUNGE-KUTTA 22
2.2. Phương pháp RUNGE-KUTTA cho phương trình vi phân-đại số 23
2.3. Các nhóm phương pháp RUNGE-KUTTA ẩn 24
2.4. Tóm tắt kết quả hội tụ 27
2.5. Bài toán nhiễu suy biến 29
2.6. Phương pháp nửa hiện 30
2.7. Ví dụ về hệ chỉ số 2 khi phương pháp số không áp dụng được 31
KẾT LUẬN 34
TÀI LIỆU THAM KHẢO 35

DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 2.1. Phương pháp Radau IIA bậc 1 và 3 26
Bảng 2.2. Phương pháp Radau IIA bậc 5 26
Bảng 2.3. Bậc hội tụ 27
Bảng 2.4. Cấp hội tụ cho bài toán chỉ số 3 (1.17-18) 28
Bảng 2.5. Cấp của sai số đối với bài toán nhiễu suy biến 30

MỞ ĐẦU

Thuật ngữ phương trình vi phân-đại số được đưa ra để đề cập đến các phương trình vi phân cùng với các ràng buộc (các phương trình vi phân trên các đa tạp) và các phương trình vi phân ẩn. Các bài toán như thế nảy sinh và cần phải được giải trong nhiều ứng dụng, chẳng hạn như các hệ cơ học có ràng buộc, động lực học chất lỏng, động học phản ứng hóa học, mô phỏng các mạng điện, và kỹ thuật điều khiển... Từ quan điểm lý thuyết, nghiên cứu các phương trình vi phân-đại số giúp chúng ta hiểu thấu đáo nguyên tắc của các phương pháp số cho các phương trình vi phân thường cứng. Do đó, chủ đề này đã thu hút nhiều sự quan tâm của các kỹ sư và các nhà toán học trong những năm qua.

Trong luận văn này, chúng tôi trình bày các kết quả về giải số của các hệ phương trình vi phân-đại số trong các ứng dụng của nhóm tác giả Ernst Hairer, Chriseian Lubich, Michel Roche về giải số hệ phương trình vi phân-đại số bằng phương pháp Runge-Kutta. Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận văn gồm hai chương

Chương 1. Kiến thức cơ sở

Nội dung chính là giới thiệu chung về hệ phương trình vi phân-đại số và trình bày ngắn gọn về cách giải số hệ phương trình vi phân thường cấp 1 bằng phương pháp Runge-Kutta.

Chương 2. Giải số hệ phương trình vi phân-đại số cấp 1 bằng phương pháp Runge-Kutta

Trong chương này, tác giả trình bày về giải số hệ phương trình, phương trình vi phân-đại số bằng phương pháp Runge-Kutta, các nhóm phương pháp Runge-Kutta ẩn, kết quả hội tụ, bài toán nhiễu, phương pháp ẩn và ví dụ về chỉ số 2 khi phương pháp số không áp dụng được

Chương 1
KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1. Giới thiệu chung về phương trình vi phân đại số

Ta xét phương trình vi phân-đại số dạng tổng quát

$$F(Y', Y) = 0 \qquad (1.1)$$

trong đó F và Y có cùng chiều, F được giả thiết là có đạo hàm bị chặn. Hệ không ôtônôm $F(Y', Y, x) = 0$ được sinh ra từ hệ *(1.1)* nhờ việc đưa vào một biến độc lập x mà $x' = 1$. Giá trị ban đầu $Y(0)$ được giả thiết là đã biết và nghiệm $Y(x)$ được tìm trên một đoạn bị chặn $\left[0; \bar{x}\right]$. Nếu $\partial F / \partial Y'$ là khả nghịch thì ta có thể giải được Y' từ *(1.1)* khi đó ta được một hệ phương trình vi phân thường. Nếu $\partial F / \partial Y'$ là suy biến ta có hệ phương trình vi phân-đại số. Một trong những cách để phân loại lớp phương trình vi phân này là dùng khái niệm chỉ số.

1.1.1. Chỉ số hệ phương trình vi phân-đại số

Chúng ta giới thiệu khái niệm chỉ số như một cách để đo độ nhạy của nhiễu đối với nghiệm trong phương trình. Có những nhóm nghiên cứu khác đưa ra một số định nghĩa khác về chỉ số cho hệ phương trình vi phân-đại số. Mối liên hệ của định nghĩa này với các định nghĩa khác về chỉ số sẽ được trình bày ở mục 1.1.8.

Định nghĩa. Phương trình *(1.1)* có chỉ số nhiễu m dọc theo nghiệm Y trên đoạn $\left[0; \bar{x}\right]$, nếu m là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho mọi hàm Y có

$$F\left(Y', Y\right) = \delta(x), \qquad (1.2)$$

thì tồn tại đánh giá

$$\left\|Y(x) - Y(x)\right\| \le C\left(\left\|Y(0) - Y(0)\right\| + \max_{0\le\xi\le x}\left\|\delta(\xi)\right\| + \ldots + \max_{0\le\xi\le x}\left\|\delta^{(m-1)}(\xi)\right\|\right), \forall x \in \left[0; \bar{x}\right] \quad (1.3)$$

với mỗi một số hạng trong vế phải là đủ nhỏ. Ở đây C là một hằng số chỉ phụ thuộc vào F và độ dài của đoạn $\left[0, \bar{x}\right]$.

Trong nghiệm số của phương trình *(1.1)*, ảnh hưởng của nhiễu lên phương trình rời rạc có vai trò quan trọng trong việc phân tích sự hội tụ và sai số làm tròn. Việc xuất hiện đạo hàm cấp *(m-1)* trong *(1.3)* sẽ biến đổi nghiệm số thành phép chia nhiễu rời rạc cho h^{m-1}, trong đó *h* là tham số rời rạc (nhỏ).

Cần lưu ý rằng có thể có các ước lượng lớn hơn *(1.3)* đối với một vài hiệu số của chênh lệch nghiệm.

Ta gọi một phương trình là phương trình chỉ số *m* nếu phương trình đó có chỉ số *m* dọc theo mọi nghiệm. Theo định nghĩa ở trên, chỉ số nhiễu không thể nhỏ hơn 1.

Trường hợp chỉ số 0 có thể được tính đến nếu ta hiểu $\delta^{(-1)}(\xi)$ là một tích phân trên δ. Cụ thể hơn, ta nói rằng phương trình *(1.1)* có chỉ số nhiễu 0 nếu

$$\left\|Y(x)-Y(x)\right\| \le C\left(\left\|Y(0)-Y(0)\right\| + \max_{0\le\xi\le x}\left\|\int_0^{\xi}\delta(t)d(t)\right\|\right)$$

Theo Bổ đề Gronwall, điều này luôn được thoả mãn đối với phương trình vi phân thường $Y' = f(Y)$. Bây giờ ta xem xét các lớp của hệ với chỉ số 1, 2 và 3, đây là các nhóm hệ thường xuất hiện trong các ứng dụng.

1.1.2. Hệ với chỉ số 1

Trường hợp đơn giản nhất là hệ có dạng

$$y' = f(y, z) \qquad (1.4.a)$$

$$0 = g(y, z) \qquad (1.4.b)$$

(trong đó, *f* và *g* là các hàm khả vi) ở đây $g_z = \dfrac{\partial g}{\partial z}$ có nghịch đảo bị chặn trong lân cận nghiệm. *(1.5)*

Giá trị ban đầu (y_0, z_0) cần phải tương thích, nghĩa là $g(y_0, z_0) = 0$. Theo Định lý hàm ẩn, *z* có thể được rút ra từ phương trình *(1.4.b)* như là một hàm số của *y*. Sau khi chèn *z* vào phương trình *(1.4.a)* ta có phương trình vi phân thường. Điều này cho thấy tồn tại nghiệm đơn trị và đều.

Xét hệ nhiễu

$$y' = f\left(y, \hat{z}\right) + \delta_1(x)$$
$$0 = g\left(y, \hat{z}\right) + \delta_2(x).$$

Áp dụng Định lý hàm ẩn ta có

$$\left\|\hat{z}(x) - z(x)\right\| \le C_1\left(\left\|y(x) - y(x)\right\| + \left\|\delta_2(x)\right\|\right),$$

với $\left\|\delta_2(x)\right\|$ nhỏ và $y(x)$ đủ gần với $y(x)$. Ta trừ phương trình *(1.4.a)* cho phương trình nhiễu tương ứng, lấy tích phân từ *0* đến *x*, sử dụng điều kiện Lipschitz cho *f* và ước lượng ở trên đối với $\hat{z}(x) - z(x)$. Ta được

$$e(x) = \left\|y(x) - y(x)\right\|$$

$$e(x) \le e(0) + C_2\int_0^x e(t)dt + C_3\int_0^x \left\|\delta_2(t)\right\| dt + \left\|\int_0^x \delta_1(t)dt\right\|,$$

và theo bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\left\|y(x) - y(x)\right\| \le C_4\left(\left\|y(0) - y(0)\right\| + \int_0^x \left\|\delta_2(t)\right\| dt + \max_{0\le\xi\le x}\left\|\int_0^\xi \delta_1(t)dt\right\|\right).$$

Sau khi chèn bất đẳng thức trên vào ước lượng $\hat{z}(x) - z(x)$, ta có ước lượng *(1.3)* không phụ thuộc vào đạo hàm của nhiễu. Do đó, hệ có chỉ số 1.

Bài toán có dạng

$$BY' = a(Y) \qquad (1.6)$$

với ma trận hằng số *B* có thể được đưa về dạng *(1.4)* nhờ việc phân tích (như bằng phép khử Gaussian) như sau