ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ THANH HƯƠNG

NĂNG LƯỢNG ĐA PHỨC CÓ TRỌNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ THANH HƯƠNG

NĂNG LƯỢNG ĐA PHỨC CÓ TRỌNG

***Chuyên ngành:* Toán giải tích**
***Mã số:* 60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

***Người hướng dẫn khoa học:* PGS.TS. PHẠM HIẾN BẰNG**

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Trần Thị Thanh Hương

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Phổ thông Dân tộc nội trú THPT Tỉnh Hoà Bình cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 7 năm 2015

Tác giả

Trần Thị Thanh Hương

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN i
LỜI CẢM ƠN ii
MỤC LỤC iii

MỞ ĐẦU 1
1. Lý do chọn đề tài 1
2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu 2
3. Phương pháp nghiên cứu 2
4. Bố cục của luận văn 2

Chương 1. CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ 3
1.1. Hàm đa điều hoà dưới 3
1.2. Hàm đa điều hoà dưới cực đại 5
1.3. Hàm cực trị tương đối 6
1.4. Toán tử Monge-Ampère phức 10

Chương 2. NĂNG LƯỢNG ĐA PHỨC CÓ TRỌNG 16
2.1. Lớp Cegrell $\mathcal{F}(\Omega)$ 16
2.2. Dung lượng của tập mức dưới 20
2.3. Các lớp năng lượng có trọng. 25
2.4. Miền giá trị của toán tử Monge-Ampere phức 37

KẾT LUẬN 41
TÀI LIỆU THAM KHẢO 42

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết đa thế vị phức được hình thành và phát triển dựa trên các công trình cơ bản của Bedford-Taylor, Siciak, Zahaziuta và nhiều tác giả khác. Tuy nhiên lý thuyết này chỉ thực sự phát triển mạnh mẽ sau khi E. Berfod và B. A.Taylor, xây dựng thành công toán tử Monge-Ampere phức cho lớp hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương và đưa ra khái niệm dung lượng của một tập Borel trong một tập mở của $\mathbb{C}^n$. Có thể xem toán tử Monge-Ampere là công cụ hữu hiệu cho việc phát triển lý thuyết đa thế vị. Các kết quả đạt được liên quan đến toán tử Monge - Ampère phức đã đóng một vai trò quan trọng trung tâm trong lý thuyết đa thế vị.

Năm 1998, U. Cegrell đã giới thiệu và nghiên cứu toán tử Monge-Ampere phức $(dd^c.)^n$ trên các lớp đặc biệt các hàm đa điều hòa dưới không bị chặn trong Ω, gọi là các lớp năng lượng. Năm 2004, Cegrell đã cho một định nghĩa tổng quát của toán tử Monge-Ampere và đạt được nhiều kết quả đẹp đẽ. Năm 2005, Cegrell đã đưa ra lớp hàm $\mathcal{E}(\Omega)$ mà trên mỗi compact $\omega \subset \Omega$, nó trùng với một hàm trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$. Tiếp tục mở rộng lớp năng lượng $\mathcal{F}(\Omega)$, năm 2009, S. Benelkourchi đã đưa ra lớp năng lượng có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ và nghiên cứu toán tử Monge-Ampere trên lớp năng lương đa phức hữu hạn trong trường hợp tổng quát. Đồng thời giải thích các lớp này theo nghĩa tốc độ giảm của dung lượng của tập mức dưới và mô tả đầy đủ miền giá trị của toán tử Monge-Ampere $(dd^c.)^n$ trong các lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$.

Theo hướng nghiên cứu này chúng tôi chọn đề tài: ***"Năng lượng đa phức có trọng"***.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả trong việc nghiên cứu về lớp năng lượng có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ và nghiên cứu toán tử Monge-Ampere trên lớp năng lượng đa phức hữu hạn trong trường hợp tổng quát.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, hàm cực trị tương đối, toán tử Monge-Ampère và một vài tính chất của nó.

- Trình bày các kết quả gần đây của Slimane Benelkourchi về một số tính chất của các lớp năng lượng U.Cegrell trong $\mathbb{C}^n$, dung lượng của tập mức dưới và một số kết quả về lớp năng lượng có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$, miền giá trị của toán tử Monge-Ampere phức.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của giải tích hàm hiện đại, các phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 43 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, hàm cực trị tương đối, toán tử Monge-Ampère và một vài tính chất của nó.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả gần đây của Slimane Benelkourchi về một số tính chất của các lớp năng lượng U.Cegrell trong $\mathbb{C}^n$, dung lượng của tập mức dưới và một số kết quả về lớp năng lượng có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$, miền giá trị của toán tử Monge-Ampere phức.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1
CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm đa điều hoà dưới

1.1.1. Định nghĩa. *Cho X là một không gian tôpô, hàm* $u : X \to [-\infty, +\infty)$ *được gọi là nửa liên tục trên trên X nếu với mọi* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tập hợp* $\{x \in X : u(x) < \alpha\}$ *là mở trong X.*

1.1.2. Định nghĩa. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông nào của* Ω. *Hàm* u *được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi* $a \in \Omega$ *và* $b \in \mathbb{C}^n$, *hàm* $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ *là điều hoà dưới hoặc trùng* $-\infty$ *trên mỗi thành phần của tập hợp* $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$. *Trong trường hợp này, ta viết* $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$. *(Ở đây kí hiệu* $\mathcal{PSH}(\Omega)$ *là lớp hàm đa điều hoà dưới trong* Ω*).*

Sau đây là một vài tính chất của hàm đa điều hoà dưới:

1.1.3. Mệnh đề. *Nếu* $u, v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ *và* $u = v$ *hầu khắp nơi trong* Ω, *thì* $u \equiv v$.

1.1.4. Mệnh đề. *Hàm đa điều hoà dưới thoả mãn nguyên lý cực trị trong miền bị chặn, tức là nếu* Ω *là một tập con mở liên thông bị chặn của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u \in PSH(\Omega)$, *thì hoặc u là hằng hoặc với mỗi* $z \in \Omega$,

$$u(z) < \sup_{\omega \in \partial\Omega} \limsup_{\substack{y \to \omega \\ y \in \Omega}} u(y).$$

1.1.5. Định nghĩa. *Tập hợp* $E \subset \mathbb{C}^n$ *được gọi là đa cực nếu với mỗi điểm* $a \in E$ *đều có một lân cận* V *của* a *và một hàm* $u \in \mathcal{PSH}(V)$ *sao cho* $E \cap V \subset \{z \in V : u(z) = -\infty\}$.

1.1.6. Hệ quả. *Các tập đa cực có độ đo* (Lebesgue) *không.*

1.1.7. Định lý. Cho Ω *là một tập con mở trong* $\mathbb{C}^n$. *Khi đó*

(i) *Họ* $\mathcal{PSH}(\Omega)$ *là nón lồi, tức là nếu* α, β *là các số không âm và* $u, v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, *thì* $\alpha u + \beta v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$.

(ii) *Nếu* Ω *là liên thông và* $u_j \;{}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{PSH}(\Omega)$ *là dãy giảm, thì* $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_j \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ *hoặc* $u \equiv -\infty$.

(iii) *Nếu* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *và nếu* $u_j \;{}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{PSH}(\Omega)$ *hội tụ đều tới* u *trên các tập con compact của* Ω, *thì* $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$.

(iv) *Giả sử* $u_\alpha \;{}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{PSH}(\Omega)$ *sao cho bao trên của nó* $u = \sup\limits_{\alpha\in A} u_\alpha$ *là bị chặn trên địa phương. Khi đó hàm chính qui nửa liên tục trên* u^* *là đa điều hoà dưới trong* Ω.

1.1.8. Hệ quả. Cho Ω *là một tập mở trong* $\mathbb{C}^n$ *và* ω *là một tập con mở thực sự khác rỗng của* Ω. *Nếu* $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, $v \in \mathcal{PSH}(\omega)$, và $\lim\limits_{x\to y} v(x) \le u(y)$ *với mỗi* $y \in \partial\omega \cap \Omega$, *thì công thức*

$$\omega = \begin{cases} \max\ u, v & \textit{trong} \quad \omega \\ u & \textit{trong} \quad \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

xác định một hàm đa điều hoà dưới trong Ω.

1.1.9. Định lý. Cho Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$.

(i) *Cho* u, v *là các hàm đa điều hoà trong* Ω *và* $v > 0$. *Nếu* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là lồi, thì* $v\phi(u / v)$ *là đa điều hoà dưới trong* Ω.

(ii) Cho $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, $v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, và $v > 0$ trong Ω. Nếu $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là lồi và tăng dần, thì $v\phi(u / v)$ là đa điều hoà dưới trong Ω.

(iii) Cho $u, -v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, $u \geq 0$ trong Ω, và $v > 0$ trong Ω. Nếu $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ là lồi và $\phi(0) = 0$, thì $v\phi(u / v) \in \mathcal{PSH}(\Omega)$.

1.1.10. Định lý. *Cho Ω là một tập con mở của $\mathbb{C}^n$ và*

$$F = \{ z \in \Omega : v(z) = -\infty \}$$

là một tập con đóng của Ω, ở đây $v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$. Nếu $u \in \mathcal{PSH}(\Omega \setminus F)$ là bị chặn trên, thì hàm $\overline{u}$ xác định bởi

$$\overline{u}(z) = \begin{cases} u(z) & (z \in \Omega \setminus F) \\ \limsup\limits_{\substack{y \to z \\ y \notin F}} u(y) & (z \in F) \end{cases}$$

là đa điều hoà dưới trong Ω.

1.1.11. Định nghĩa. *Một miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là miền siêu lồi nếu tồn tại hàm đa điều hòa dưới liên tục $\psi : \Omega \to (-\infty, 0)$ sao cho*

$$\Omega_c = \{ z \in \Omega : \psi(z) < c \} \Subset \Omega \text{ với mọi } c < 0.$$

1.2. Hàm đa điều hoà dưới cực đại

1.2.1. Định nghĩa. *Cho Ω là một tập con mở của $\mathbb{C}^n$ và $u : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm đa điều hoà dưới. Ta nói rằng u là cực đại nếu với mỗi tập con mở compact tương đối G của Ω, và với mỗi hàm nửa liên tục trên v trên $\overline{G}$ sao cho $v \in \mathcal{PSH}(G)$ và $v \leq u$ trên ∂G, đều có $v \leq u$ trong G.*

Một số tính chất tương đương của tính cực đại.