ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ HOÀNG TÙNG

THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU VÀ ỨNG DỤNG TRONG TÁI TỐI ƯU HÓA VỚI RÀNG BUỘC PHỤ

(The dual simplex method and its applications to reoptimization with supplementary constraints)

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - 2015

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Qui hoạch tuyến tính là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) của một hàm tuyến tính với các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính. Qui hoạch tuyến tính có nhiều ứng dụng rộng rãi trong lý thuyết và thực tiễn.

Với mỗi bài toán qui hoạch tuyến tính đã cho (gọi là *bài toán gốc*) được gắn với một bài toán qui hoạch tuyến tính khác (gọi là *bài toán đối ngẫu*). Hai bài toán này có quan hệ chặt chẽ với nhau và là cặp bài toán đối ngẫu của nhau. Nghiên cứu bài toán đối ngẫu sẽ giúp hiểu rõ hơn về bài toán gốc và ngược lại.

Phương pháp đơn hình (do G. B. Dantzig đề xuất năm 1947) là phương pháp quen thuộc, có hiệu qủa để giải bài toán qui hoạch tuyến tính. Phương pháp đơn hình có nhiều biến thể khác nhau, phù hợp với các dạng cụ thể của bài toán qui hoạch tuyến tính như: đơn hình gốc, đơn hình cải biên, đơn hình đối ngẫu, đơn hình gốc - đối ngẫu ...

Trong một số tình huống thực tế, sau khi giải xong bài toán ta thấy cần bổ sung thêm một số ràng buộc vào bài toán. Nếu giải lại bài toán từ đầu thì sẽ tốn nhiều thời gian và công sức. Việc tận dụng lời giải đã có để giải tiếp bài toán mới gọi là *kỹ thuật tái tối ưu hóa* bài toán. Để làm việc này, phương pháp đơn hình đối ngẫu rất hữu ích. Vì thế cần đi sâu tìm hiểu về phương pháp này, cùng các dạng thể hiện cụ thể và các ứng dụng của nó trong kỹ thuật tái tối ưu hóa.

Với ý nghĩa đó, chúng tôi chọn đề tài luận văn:

"Thuật toán đơn hình đối ngẫu và ứng dụng
trong tái tối ưu hóa với ràng buộc phụ "

Mục đích chính của đề tài là tìm hiểu và trình bày kết quả lý thuyết về bài toán qui hoạch tuyến tính và qui hoạch tuyến tính đối ngẫu, các thuật toán khác nhau của phương pháp đơn hình đối ngẫu và ứng dụng thuật toán đơn hình đối ngẫu trong tái tối ưu hóa khi thêm ràng buộc phụ vào bài toán. Luận văn được viết dựa chủ yếu trên các tài liệu tham khảo [1] - [4].

Các kết quả cần đạt được: hiểu và trình bày được một số nội dung chính sau:

a) Bài toán qui hoạch tuyến tính và bài toán đối ngẫu. Lý thuyết đối ngẫu.

b) Phương pháp đơn hình đối ngẫu và các thuật toán đơn hình đối ngẫu.

c) Phương pháp tái tối ưu hóa khi thêm ràng buộc phụ vào bài toán đã giải.

Cấu trúc luận văn gồm 3 chương.

• Chương 1 "**Kiến thức chuẩn bị**" nhắc lại tổng quan vắn tắt một số kiến thức cơ bản cần thiết về qui hoạch tuyến tính, bài toán qui hoạch tuyến tính đối ngẫu, các định lý đối ngẫu trong qui hoạch tuyến tính, với nhiều ví dụ số và hình vẽ minh họa cho các sự kiện, các định lý đã trình bày. Cuối chương giới thiệu ý tưởng cơ bản của phương pháp đơn hình gốc, đơn hình đối ngẫu giải qui hoạch tuyến tính.

• Chương 2 "**Thuật toán đơn hình đối ngẫu** " trình bày chi tiết các bước tính toán của thuật toán đơn hình đối ngẫu dạng đầy đủ và thuật toán đơn hình đối ngẫu dạng cải biên. Cuối chương trình bày ví dụ áp dụng thuật toán đơn hình đối ngẫu dạng đầy đủ vào giải bài toán trò chơi ma trận.

• Chương 3 "**Kỹ thuật tái tối ưu hóa với ràng buộc phụ**" trình bày vấn đề tái tối ưu hóa khi thêm ràng buộc vào bài toán sau khi đã giải xong và vai trò của việc áp dụng thuật toán đơn hình đối ngẫu trong tái tối ưu hóa. Cuối chương nêu ví dụ minh họa.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn này còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quí thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn sau này.

Nhân dịp này, tác giả luận văn xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TS. Trần Vũ Thiệu, đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán hoc - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Chương 1
KIẾN THỨC VỀ QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chương này trình bày tóm tắt một số kiến thức cơ bản cần thiết về qui hoạch tuyến tính, bài toán qui hoạch tuyến tính đối ngẫu, các định lý đối ngẫu trong qui hoạch tuyến tính và phương pháp đơn hình gốc, đơn hình đối ngẫu giải qui hoạch tuyến tính. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [3] và [4].

1.1. BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH VÀ BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

1.1.1. Phát biểu bài toán

Bằng các phép biến đổi đơn giản, một bài toán qui hoạch tuyến tính bất kỳ có thể đưa được về một trong hai dạng chính sau đây.

• Dạng chuẩn tắc:

$$\min \{f(x) = c^T x : Ax \geq b,\ x \geq 0\},$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ có nghĩa $x \in \mathbb{R}^n_+$. Trong bài toán này tập ràng buộc $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ là một tập lồi đa diện.

• Dạng chính tắc:

$$\min \{f(x) = c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\},$$

trong đó A, b, c và x được xác định như ở trên. Trong bài toán này tập ràng buộc $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$ cũng là một tập lồi đa diện.

Có thể dễ dàng chuyển từ dạng chuẩn tắc sang dạng chính tắc và ngược lại.

Trong các bài toán trên f(x) được gọi là *hàm mục tiêu*. Mỗi bất phương trình $(Ax)_i \geq b_i$ hay phương trình $(Ax)_i = b_i$ gọi là một *ràng buộc chính*, $x_j \geq 0$, $j = 1,\dots, n$ gọi là các *ràng buộc không âm* hay *ràng buộc về dấu*. Véctơ (điểm) $x \in D$ gọi là một *nghiệm chấp nhận được* hay một *phương án*. Một phương án đạt cực tiểu của hàm mục tiêu f(x) gọi là một *phương án tối ưu* hay một *nghiệm tối ưu* của bài toán.

1.1.2. Các tính chất cơ bản

Định lý sau nêu điều kiện để một qui hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu.

Định lý 1.1. *Nếu một qui hoạch tuyến tính có nghiệm chấp nhận được và nếu hàm mục tiêu bị chặn dưới trên tập ràng buộc (đối với bài toán min) thì qui hoạch đó chắc chắn có nghiệm tối ưu.*

Định lý 1.2. *Nếu* x^0 *là một phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng bất kỳ và nếu* x^1, x^2 ($x^1 \neq x^2$) *là hai phương án thỏa mãn* $x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, $0 < \lambda < 1$, *thì* x^1, x^2 *cũng là các phương án tối ưu của bài toán.*

Định nghĩa 1.1. Một nghiệm chấp nhận được $x \in D$ mà đồng thời là một đỉnh của D được gọi là một *nghiệm cơ sở* hay một *phương án cực biên*, nghĩa là x không thể biểu diễn được dưới dạng một tổ hợp lồi của bất kỳ hai nghiệm chấp nhận được (phương án) nào khác của bài toán.

Định lý sau nêu một tính chất đặc trưng cho phương án cực biên (nghiệm cơ sở) của bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc với giả thiết $m \leq n$ và $rank(A) = m$.

Định lý 1.3. *Để một nghiệm chấp nhận được* $\overline{x} = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$ *của qui hoạch tuyến tính chính tắc là nghiệm cơ sở thì cần và đủ là các véctơ cột* A_j *của ma trận* A *ứng với các thành phần* $\overline{x}_j > 0$ *là độc lập tuyến tính.*

Người ta phân ra hai loại nghiệm cơ sở: *không suy biến* nếu nghiệm đó có số thành phần dương bằng m và *suy biến* nếu nó có số thành phần dương nhỏ hơn m.

Định lý sau cho thấy qui hoạch tuyến tính chính tắc có phương án cực biên.

Định lý 1.4. *Nếu bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc có ít nhất một phương án thì nó cũng có phương án cực biên, nghĩa là tập ràng buộc* D *có đỉnh.*

Định lý sau cho phép tìm phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc trong số các phương án cực biên của bài toán (số này hữu hạn).

Định lý 1.5. *Nếu bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì nó cũng có phương án cực biên tối ưu.*

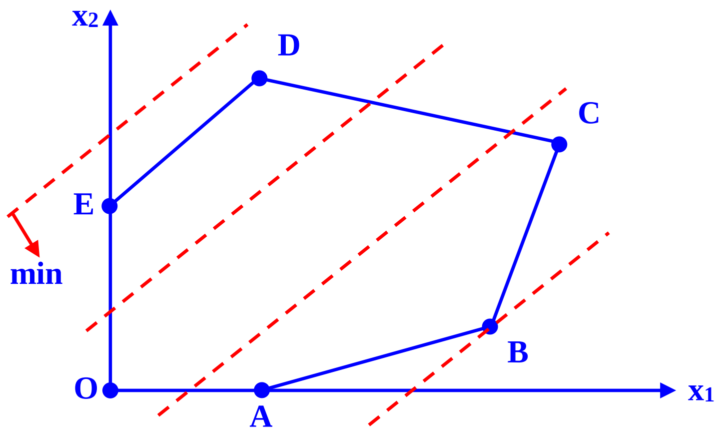
Ví dụ 1.1. Xét bài toán qui hoạch tuyến tính

$$f(x) = - x_1 + x_2 \rightarrow \min,$$

với các điều kiện: $x_1 - 3x_2 \leq 2,\ 3x_1 - x_2 \leq 14,\ x_1 \geq 0,$

$$x_1 + 4x_2 \leq 22,\ - x_1 + x_2 \leq 3,\ x_2 \geq 0.$$

Tập ràng buộc của bài toán là đa giác lồi 6 đỉnh vẽ ở Hình 1.1. Tọa độ các đỉnh: O = (0, 0), A = (2, 0), B = (5, 1), C = (6, 4), D = (2, 5), E = (0, 3). Theo Định lý 1.5, nghiệm tối ưu của bài toán đạt được tại một trong các đỉnh của đa giác. Tính giá trị hàm mục tiêu tại các đỉnh này, ta nhận được: f(O) = 0, f(A) = – 2, f(B) = – 4, f(C) = – 2, f(D) = 3 và f(E) = 3. Từ đó cho thấy cực tiểu của hàm f đạt tại đỉnh B (5, 1) với giá trị cực tiểu $f_{min} = -4$.



Hình 1.1. Tập ràng buộc của bài toán ở Ví dụ 1.1.

1.1.3. Cặp bài toán đối ngẫu

Đối ngẫu là phương pháp mà ứng với mỗi bài toán qui hoạch tuyến tính đã cho (gọi là *bài toán gốc*), ta có thể thiết lập một bài toán qui hoạch khác (gọi là *bài toán đối ngẫu*) sao cho từ nghiệm của bài toán này ta sẽ thu được thông tin về nghiệm của bài toán kia.

Sau đây là hai dạng cặp bài toán đối ngẫu thường gặp.

• Đối ngẫu của qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc (qui hoạch gốc)

(P) $\min \{f(x) = c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$

là bài toán qui hoạch tuyến tính (qui hoạch đối ngẫu):

(Q) $\max \{g(y) = b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0\}$

(A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A).

Ví dụ 1.2. Đối ngẫu của bài toán qui hoạch tuyến tính chuẩn tắc

$$f(x) = 20x_1 + 15x_2 \to \min,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 60,$$

$$x_1 + x_2 \geq 40,$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 60,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

là bài toán qui hoạch tuyến tính:

$$g(y) = 60y_1 + 40y_2 + 60y_3 \rightarrow \max,$$
$$3y_1 + y_2 + y_3 \leq 20,$$
$$y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 15,$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$$

• Đối ngẫu của qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc (qui hoạch gốc):

(P) $\min\{f(x) = c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$

là bài toán qui hoạch tuyến tính (qui hoạch đối ngẫu):

(Q) $\max\{g(y) = b^T y : A^T y \leq c\}.$

Ví dụ 1.3. Đối ngẫu của bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc

$$f(x) = 0{,}2x_1 + 0{,}8x_4 + 0{,}6x_5 \rightarrow \min,$$
$$2x_1 + x_3 + x_5 = 400,$$
$$+ 2x_2 + x_5 = 400,$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1300,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

là bài toán qui hoạch tuyến tính:

$$g(y) = 400y_1 + 400y_2 + 1300y_3 \rightarrow \max,$$
$$2y_1 \leq 0{,}2$$
$$2y_2 + y_3 \leq 0,$$
$$y_1 + 2y_3 \leq 0,$$
$$3y_3 \leq 0{,}8$$
$$y_1 + y_2 \leq 0{,}6.$$

Dễ kiểm tra lại rằng lấy đối ngẫu của bài toán đối ngẫu ta được lại bài toán gốc. Vì thế ta gọi (P) và (Q) là cặp bài toán qui hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau.

1.2. CÁC ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

Các kết quả nêu dưới đây đúng cho cặp bài toán đối ngẫu (P), (Q) dạng bất kỳ.

Định lý 1.6 (Đối ngẫu yếu). *Nếu* x *là một lời giải chấp nhận được của bài toán gốc* (P) *và* y *là một lời giải chấp nhận được của bài toán đối ngẫu* (Q) *thì*

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \geq g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m,$$

nghĩa là giá trị mục tiêu của một phương án gốc bất kỳ (bài toán min) *không nhỏ hơn giá trị mục tiêu của một phương án đối ngẫu bất kỳ* (bài toán max).

Định lý 1.7 (Đối ngẫu mạnh). *Nếu một qui hoạch có nghiệm tối ưu thì qui hoạch đối ngẫu của nó cũng có nghiệm tối ưu và hai giá trị tối ưu bằng nhau.*

Các định lý trên cho thấy các quan hệ sau giữa hai qui hoạch gốc và đối ngẫu.

Định lý 1.8 (Định lý đối ngẫu cơ bản). *Đối với một cặp bài toán qui hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau chỉ có một trong ba khả năng loại trừ nhau sau đây*:

a) *Cả hai bài toán đều không có nghiệm chấp nhận được.*

b) *Cả hai bài toán đều có nghiệm chấp nhận được. Khi đó, cả hai đều có nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu của hai hàm mục tiêu bằng nhau.*

c) *Một bài toán có nghiệm chấp nhận được và bài toán kia không có nghiệm chấp nhận được. Khi đó, bài toán có nghiệm chấp nhận được sẽ có giá trị tối ưu vô cực* (+∞ *hay* - ∞ *tùy theo bài toán* max *hay* min).

Các ví dụ sau đây minh hoạ cho các tình huống a) - c) nêu trên.

a) Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu không có phương án.

$$f(x) = x_1 \rightarrow \min, \qquad g(y) = y_1 + y_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \text{ tuỳ ý} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 - y_2 = 1 \\ y_1 - y_2 = 0 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu có phương án.

$$f(x) = 5x_1 + 10x_2 \rightarrow \min, \qquad g(y) = 14y_1 + 12y_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 14 \\ x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 5 \\ 3y_1 + 4y_2 \le 10 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Phương án tối ưu của hai bài toán là x* = (4; 2) và y* = (2; 1) với f(x*) = g(y*) = 40.

c) Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều không có phương án tối ưu.

$$f(x) = x_1 \to \min, \qquad g(y) = y_1 + y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 - y_2 \le 1 \\ y_1 - y_2 \le 0 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Quan hệ giữa cặp bài toán đối ngẫu nhau còn thể hiện ở định lý sau đây.

Định lý 1.9 (Định lý độ lệch bù). *Một cặp nghiệm chấp nhận được* x, y *của hai qui hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau* (P) *và* (Q) *là cặp nghiệm tối ưu khi và chỉ khi chúng nghiệm đúng các hệ thức*:

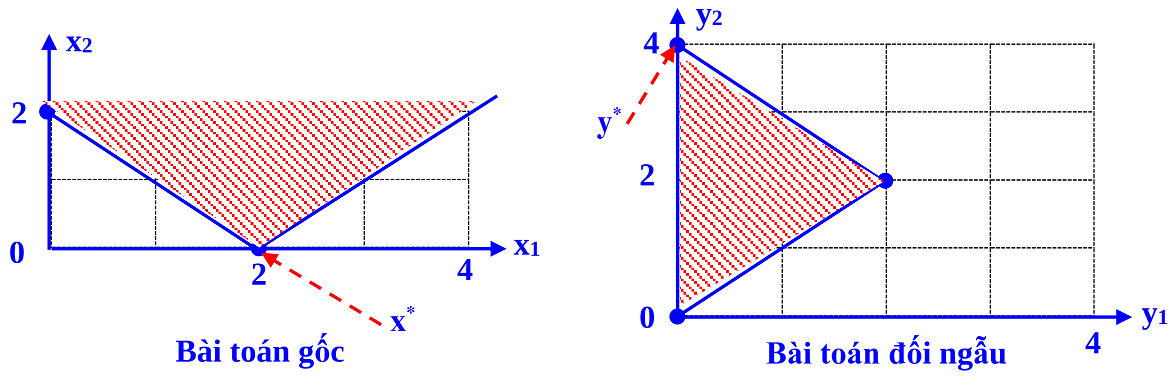
$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots, m \Leftrightarrow y^T(Ax - b) = 0,$$

$$x_j\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\right) = 0 \ \forall j = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow x^T(c - A^Ty) = 0.$$

Ví dụ 1.4. Xét cặp bài toán đối ngẫu chuẩn tắc:

$\min \{4x_1 : x_1 + x_2 \ge 2,\ x_1 - x_2 \ge 2,\ x_j \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$ và

$\max \{2y_1 + 2y_2 : y_1 + y_2 \le 4,\ y_1 - y_2 \le 0,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0\}$.



Hình 1.1. Tập ràng buộc cặp bài toán đối ngẫu ở Ví dụ 1.3