ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ LAN DUNG

ĐỊNH LÍ KHÔNG ĐIỂM TỔ HỢP VÀ MỘT VÀI VẬN DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với PGS.TS Đàm Văn Nhỉ, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô giáo trong Bộ môn Toán - Tin, Phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, các bạn học viên lớp Cao học Toán K7D trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, 2015 **Vũ Lan Dung**

Học viên Cao học Toán K7D,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Lời nói đầu

Mục đích của luận văn là chứng minh lại một số định lí nổi tiếng về đa thức nhiều biến với hệ số trên một trường như Định lý không điểm của Hilbert, Định lý không điểm tổ hợp của Noga Alon và một số vận dụng phương pháp đa thức, đồng thời vận dụng các định lí này để nghiên cứu một số vấn đề trong tổ hợp và trong số học. Đây là kết quả mới còn có thể tiếp tục phát triển thêm theo hướng nghiên cứu này. Luận văn được chia thành ba chương với những nội dung chính sau đây:

Chương 1 của luận văn trình bày chứng minh Định lý không điểm của Hilbert, Định lý không điểm tổ hợp. Thực chất định lí không điểm tổ hợp là một dạng mở rộng của định lí không điểm Hilbert, định lí này cho một mô tả các đa thức triệt tiêu trên một tập điểm có dạng tích Descartes. Phần cuối chương I trình bày ứng dụng của định lí này vào các bài toán tô màu đồ thị.

Chương 2 của luận văn trình bày phương pháp đa thức, tổng thu hẹp các thặng dư và một vài ví dụ liên quan.

Chương 3 tập trung trình bày một số vận dụng các kết quả đạt được trong toán sơ cấp như chứng minh các kết quả cổ điển của số học đó là định lí Fecmat, Wilson, bài toán Waring (cho đa thức), giải một số phương trình nghiệm nguyên, chứng minh số vô tỉ, chứng minh một số bất đẳng thức trong toán phổ thông.

Để hoàn thành luận văn này, em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới **PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ** đã hướng dẫn, chỉ bảo tận tình em

trong suốt quá trình thực hiện luận văn này. Cuối cùng em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô trong Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên cùng toàn thể bạn bè trong lớp đã giúp đỡ, đóng góp ý kiến trong quá trình nghiên cứu, học tập và hoàn thành luận văn.

Hải Dương, ngày 25 tháng 5 năm 2015

Học viên: **Vũ Lan Dung**

Chương 1

Định lý không điểm tổ hợp

1.1 Định lý không điểm tổ hợp

1.1.1 Định lý không điểm Hilbert

Khái niệm vành đa thức nhiều biến trên trường K đã được trình bày trong nhiều giáo trình đại số, chẳng hạn [1]. Do vậy, chúng tôi không nhắc lại ở đây. Một trường K thỏa mãn điều kiện mọi đa thức một biến bậc dương trên K đều có nghiệm trong K được gọi là *trường đóng đại số,* chẳng hạn trường số phức $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số, còn trường số thực $\mathbb{R}$ không là trường đóng đại số.

Để trình bày Định lý Hilbert về không điểm, ta sẽ vận dụng kết quả, không chứng minh, sau đây.

Bổ đề 1.1.1. *Nếu hệ phương trình đa thức* $\begin{cases} g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, r \end{cases}$ *không có nghiệm thì tồn tại các đa thức* $a_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{r} a_i(x_1, \ldots, x_n) g_i(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

Xét hệ các phương trình đa thức $\begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, r. \end{cases}$ Giả sử đa thức

$g(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ thỏa mãn $g(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = 0$ khi $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} f_i(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ i = 1,2,\ldots,r. \end{cases}$ Khi đó ta có kết quả sau:

Định lý 1.1.2. [Hilbert's zero-theorem] *Giả sử $g(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ thỏa mãn $g(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = 0$ khi $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ là nghiệm của hệ*

$$\begin{cases} f_i(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ i = 1,2,\ldots,r. \end{cases}$$

Khi đó có các đa thức $b_i(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ và số nguyên dương s thỏa mãn $g(x_1,\ldots,x_n)^s = \sum_{i=1}^{r} b_i(x_1,\ldots,x_n) f_i(x_1,\ldots,x_n)$.

Chứng minh. Ký hiệu z là biến mới. Coi các đa thức $f_i(x_1,\ldots,x_n)$ như là các phần tử thuộc vành đa thức $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,z]$. Xét hệ phương trình đa thức

$$\begin{cases} f_i(x) = f_i(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ i = 1,2,\ldots,r \\ zg(x) - 1 = zg(x_1,\ldots,x_n) - 1 = 0. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Theo Bổ đề 1.1.1, tồn tại các $a_i(x_1,\ldots,x_n,z)$ và $b(x_1,\ldots,x_n,z)$ thuộc vành $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n,z]$ để

$$\sum_{i=1}^{r} a_i(x_1,\ldots,x_n,z) f_i(x) + b(x_1,\ldots,x_n,z)(zg(x) - 1) = 1.$$

Đồng nhất thức này vẫn đúng khi ta thay z qua $\dfrac{1}{g(x)}$. Từ đây suy ra

$$\sum_{i=1}^{r} a_i\big(x_1,\ldots,x_n,\frac{1}{g(x)}\big) f_i(x) = 1.$$

Nhân hai vế với một lũy thừa thích hợp của $g(x)$ ta nhận được hệ thức $g(x_1,\ldots,x_n)^s = \sum_{i=1}^{r} b_i(x_1,\ldots,x_n) f_i(x_1,\ldots,x_n)$. □

1.1.2 Định lý không điểm tổ hợp

Chúng ta sẽ chứng minh hai định lý của Noga Alon, giáo sư tại Tel Aviv University, gọi là *Combinatorial Nullstellensatz,* được sử dụng nhiều trong Tổ hợp, Lý thuyết số, Đồ thị và Tô màu.

Bổ đề 1.1.3. *Giả thiết trường K có* $\mathrm{char}(K) = 0$. *Cho đa thức khác không $g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) \in K[x]$ ta ký hiệu $t_i = \deg_i g(x)$ là bậc của $g(x)$ theo biến $x_i, i = 1, \ldots, n$. Ký hiệu các tập con $S_i \subset K$ thỏa mãn $|S_i| \geqslant t_i + 1$ với $i = 1, \ldots, n$. Nếu $g(\alpha) = 0$ thỏa mãn cho mọi $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ thì $g(x) \equiv 0$.*

Chứng minh. Ta chứng minh kết luận bằng phương pháp quy nạp theo n. Với $n = 1$, ta có đa thức một biến $g(x_1)$ bậc t_1 triệt tiêu trên tập S_1 với nhiều hơn t_1 phần tử. Do vậy $g(x_1) \equiv 0$ theo Định lý Bezout. Giả sử kết luận đúng cho tất cả các đa thức ít hơn n biến. Biểu diễn lại đa thức $g(x)$ thành đa thức của biến x_n như sau:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{t_n} g_j(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^j \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n].$$

Với mỗi bộ $(\gamma) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{n-1}$ cố định ta có $g(\gamma, x_n) = \sum\limits_{j=0}^{t_n} g_j(\gamma) x_n^j \equiv 0$ trên tập S_n. Từ đó suy ra $g_j(\gamma) = 0$ với mọi $j = 0, 1, \ldots, t_n$ và mọi $(\gamma) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{n-1}$. Theo giả thiết quy nạp ta có $g_j(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv 0$ với mọi $j = 0, 1, \ldots, t_n$. Như vậy $g(x) \equiv 0$. Bổ đề đã được chứng minh. □

Định lý 1.1.4. [Noga Alon] *Giả thiết trường K có* $\mathrm{char}(K) = 0$. *Cho đa thức khác không $g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) \in K[x]$. Ký hiệu các tập con $S_i \subset K$ thỏa mãn $|S_i| \geqslant 1$ và $p_i(x_i) = \prod\limits_{s \in S_i} (x_i - s)$ với $i = 1, \ldots, n$. Nếu $g(x)$ triệt tiêu tại mọi nghiệm chung của $p_1, \ldots, p_n$ thì tồn tại đa thức*

$q_1, \dots, q_n \in K[x_1, \dots, x_n]$ *thỏa mãn* $\deg q_i \leqslant \deg g - \deg p_i$ *để*

$$g = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i.$$

Chứng minh. Đặt $t_i = |S_i| - 1$ với $i = 1, \dots, n$. Theo giả thiết ta có $g(\alpha) = 0$ với mọi $(\alpha) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Biểu diễn lại đa thức

$$p_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s) = x_i^{t_i+1} - \sum_{j=0}^{t_i} a_{ij} x_i^j, a_{ij} \in S_i, i = 1, \dots, n.$$

Do $p_i(s) = 0$ nên $s^{t_i+1} = \sum\limits_{j=0}^{t_i} a_{ij} s^j, a_{ij} \in S_i, i = 1, \dots, n$. Như vậy $x_i^{t_i+1} = \sum\limits_{j=0}^{t_i} a_{ij} x_i^j$ trên S_i với $i = 1, \dots, n$. Ký hiệu đa thức $g^*(x)$ là đa thức nhận được từ $g(x)$ qua việc biểu diễn $g(x)$ như là tổ hợp của các đơn thức và lần lượt thay $x_i^{t_i+1}$ bởi $\sum\limits_{j=0}^{t_i} a_{ij} x_i^j$. Như vậy, đa thức nhận được sau khi thay $g^*(x)$ có bậc không quá t_i đối với mỗi biến x_i với $i = 1, \dots, n$ và nhận được từ $g(x)$ bởi việc trừ đi các tích dạng $q_i p_i$, trong đó đa thức $q_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ với $\deg q_i \leqslant \deg g - \deg p_i$. Qua những lần biến đổi, ta vẫn luôn luôn có $g^*(\alpha) = g(\alpha) = 0$ với mọi $\alpha \in \prod\limits_{i=1}^{n} S_i$. Theo Bổ đề 1.1.3, $g^* \equiv 0$ và suy ra $g = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i p_i$. □

Định lý 1.1.5. [Noga Alon] *Giả thiết trường K có* $\mathrm{char}(K) = 0$. *Cho đa thức khác không* $g(x) = g(x_1, \dots, x_n) \in K[x]$ *với bậc* $\deg g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i, t_i \in \mathbb{N}$. *Giả thiết hệ số của đơn thức* $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$ *khác 0. Khi đó, nếu các tập con* $S_i \subset K$ *thỏa mãn* $|S_i| \geqslant t_i + 1$ *với* $i = 1, 2, \dots, n$, *thì tồn tại* $\alpha_1 \in S_1, \dots, \alpha_n \in S_n$ *để* $g(\alpha) \neq 0$.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh định lý cho trường hợp $|S_i| = t_i + 1$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Giả sử kết luận trên không đúng. Xét các đa thức $p_i(x_i) = \prod\limits_{s \in S_i} (x_i - s), i = 1, \dots, n$. Theo Định lý 1.1.4, tồn tại các đa thức