ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HỒ THỊ THU HUYỀN

PHƯƠNG TRÌNH EULER - WARING CHO ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ ĐẶC SỐ KHÔNG VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HỒ THỊ THU HUYỀN

PHƯƠNG TRÌNH EULER - WARING CHO ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ ĐẶC SỐ KHÔNG VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. VŨ HOÀI AN

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Mục lục **i**

Lời cam đoan **ii**

Lời cảm ơn **iii**

Mở đầu **1**

1 Phương trình Euler - Waring đối với đa thức tuyến tính và đa thức Laurent trên trường đóng đại số đặc số không **4**

1.1 Phương trình Euler - Waring đối với đa thức tuyến tính . . . 4

1.2 Phương trình Euler - Waring đối với đa thức Laurent 21

2 Phương trình Euler - Waring đối với đa thức trên trường đóng đại số đặc số không và ứng dụng **24**

2.1 Phương trình Euler - Waring đối với đa thức trên trường đóng đại số đặc số không 24

2.2 Ứng dụng phương trình Euler - Waring trong toán học phổ thông 46

Kết luận **58**

Tài liệu tham khảo **59**

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan mọi thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Họ và tên

Hồ Thị Thu Huyền

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với TS. Vũ Hoài An, đã trực tiếp hướng dẫn tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô giáo trong Khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo Khoa học, các bạn học viên lớp Cao học Toán K7D trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, 2015 **Hồ Thị Thu Huyền**

Học viên Cao học Toán K7D,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán chia kẹo của Euler [1]: Có n chiếc kẹo giống nhau chia cho m em bé. Hỏi có bao nhiêu cách chia kẹo?

Hay chính là bài toán sau đây:

Bài toán A (Bài toán Euler [1]): Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Sự tương tự của Bài toán Euler đã được đề cập trong [4]. Ở đó, Dong - IL. Kim đã xét phương trình Waring sau:

$$f_1^k(z) + \cdots + f_n^k(z) = z, \tag{1}$$

ở đó $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ là các đa thức với hệ số phức, k là số nguyên dương.

Trong [2], Nguyễn Hoài Nam đã xét phương trình sau đây đối với đa thức trên trường đóng đại số đặc số không:

$$f_1^k(z) + \cdots + f_n^k(z) = 0.$$

Mặt khác, sự tương tự giữa đa thức và số nguyên cho ta ứng dụng của các kiểu phương trình trên trong toán học phổ thông (xem [2]). Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi xem xét vấn đề: *Phương trình Euler - Waring đối với đa thức trên trường đóng đại số đặc số không và ứng dụng*. Cụ thể, chúng tôi xét hai phương trình sau:

$$f_1^k(z) + \cdots + f_n^k(z) = p(z), \tag{2}$$

$$f_1^{k_1}(z) + \cdots + f_n^{k_n}(z) \equiv p(z), \tag{3}$$

ở đó $f_1(z), \ldots, f_n(z), p(z)$ là các đa thức trên trường đóng đại số đặc số không, $k, k_1, \ldots, k_n$ là các số nguyên dương nào đó.

2. Mục đích, nhiệm vụ và phương pháp nghiên cứu

Tổng hợp và trình bày các kết quả trong [4] và tương tự của nó về các phương trình (1), (2) và (3). Chú ý rằng công cụ chúng tôi dùng ở đây có khác so với Dong-Il.Kim và Nguyễn Hoài Nam. Trong [4], Dong-Il.Kim dùng công thức Nhị Thức Newton và bất đẳng thức giữa bậc và số không điểm. Trong [2], Nguyễn Hoài Nam dùng các Định lý chính đối với đường cong hữu tỷ. Ở đây chúng tôi dùng Định lý Mason suy rộng [3, Định lý 2.1.2].

Ứng dụng các kết quả về phương trình (2) và (3) trong toán học phổ thông. Để ý rằng $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số đặc số không. Do đó các kết quả khi xét đối với $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số đặc số không vẫn đúng khi thay $\mathbb{K}$ bằng $\mathbb{C}$. Ngoài ra, chúng tôi cũng xét tương tự vấn đề của Dong-Il.Kim và mở rộng của nó cho Bài toán chia kẹo của Euler và phương trình nghiệm nguyên.

3. Nội dung nghiên cứu

Luận văn tổng hợp, trình bày các kết quả về phương trình Euler - Waring đối với đa thức trên trường đóng đại số đặc số không và ứng dụng của nó. Các kết quả này đã được đề cập trong [4] và tương tự của nó, trường hợp đặc biệt đã được đề cập trong [2]. Các ví dụ ứng dụng đã được đề cập trong [1]. Cụ thể:

- Trình bày các Định lý 1.1.7, 1.1.9, 1.2.1, 1.2.3, 2.1.7, 2.1.8. Định lý 1.1.9 là kết quả của Dong - Il. Kim trong [4, Định lý 2.1.2]. Định lý 1.2.1, 1.2.3 là trường hợp riêng của Định lý 3.2.1 trong [4].

- Trình bày 7 ví dụ về Bài toán chia kẹo của Euler.

- Trình bày 6 ví dụ về ứng dụng vấn đề của Dong - Il. Kim trong [4] đối với phương trình nghiệm nguyên.

4. Cấu trúc luận văn

Luận văn được chia thành hai chương với nội dung chính như sau:

Chương 1 trình bày phương trình Euler - Waring đối với đa thức tuyến tính và đa thức Laurent trên trường đóng đại số đặc số không. Cụ thể: trình bày các Định lý $1.1.7$, $1.1.9$, $1.2.1$, $1.2.3$. Định lý $1.1.9$ là kết quả của Dong - Il. Kim trong ([4] Định lý 2.1.2) . Định lý $1.2.1$, $1.2.2$ là trường hợp riêng của Định lý 3.2.1 trong [4].

Chương 2 trình bày phương trình Euler - Waring đối với đa thức trên trường đóng đại số đặc số không và ứng dụng trong toán học phổ thông. Các Định lý $2.1.7$, $2.1.8$ là tương tự của Định lý 2.1.2, Định lý 3.2.1 trong [4] cho phương trình $P(f) = Q(g)$, ở đó P, Q là đa thức, f, g là hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số đặc số không. Về phần ứng dụng trong toán học phổ thông, chương này trình bày 7 ví dụ về Bài toán Euler, 6 ví dụ về ứng dụng vấn đề nghiên cứu của Dong - Il.Kim trong [4] đối với phương trình nghiệm nguyên.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Hồ Thị Thu Huyền

Email: hothuhuyen75@gmail.com

Chương 1

Phương trình Euler - Waring đối với đa thức tuyến tính và đa thức Laurent trên trường đóng đại số đặc số không

Dong - IL. Kim [4] đã phát biểu và chứng minh định lý sau.

Định lý B ([4], Định lý 2.1.2). Giả sử $k \geq 2, n \geq 2$. Cho $f_1, \ldots, f_n$ là các đa thức tuyến tính khác hằng thỏa mãn

$$f_1^k(z) + \cdots + f_n^k(z) = z. \tag{1}$$

Giả sử rằng p là số n nhỏ nhất thỏa mãn (2). Khi đó $p = k$.

Từ Định lý B trong chương này chúng tôi xét phương trình (1) và phương trình sau đối với đa thức Laurent:

$$f_1^k(z) + f_2^k(z) = a. \tag{1.1}$$

$$f_1^k(z) + f_2^k(z) = z. \tag{1.2}$$

1.1 Phương trình Euler - Waring đối với đa thức tuyến tính

Trước tiên chúng ta nhắc lại các kết quả của vấn đề nhận giá trị đối với các hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số đặc số không.

Định nghĩa 1.1.1. Một trường $\mathbb{K}$ được gọi là *đóng đại số* nếu mọi đa thức một ẩn có bậc khác không với hệ số trong $\mathbb{K}$, có nghiệm trong $\mathbb{K}$.

Ví dụ 1.1.1. Trường hữu tỷ $\mathbb{Q}$ không là trường đóng đại số vì đa thức $P(x) = x^{10} + 2$ không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$ mặc dù các hệ số của đa thức này đều thuộc $\mathbb{Q}$.

Trường số thực $\mathbb{R}$ không là trường đóng đại số vì đa thức $P(x) = \sqrt{3}x^2 + 1$ không có nghiệm trong $\mathbb{R}$ mặc dù các hệ số của đa thức này đều thuộc $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho $\mathbb{K}$ là một trường.

1) Số tự nhiên n nhỏ nhất khác không sao cho $n.1 = 0$ thì số n được gọi là đặc số không của trường $\mathbb{K}$. Kí hiệu $\mathrm{char}(\mathbb{K})$.

2) Với mọi số tự nhiên $n \neq 0$ mà $n.1 \neq 0$ thì khi đó ta nói trường $\mathbb{K}$ có đặc số là 0.

Ví dụ 1.1.2. Trường số thực $\mathbb{R}$ có đặc số 0. Trường $\mathbb{Z}_{13}$ có đặc số 13 vì $\overline{13} \equiv \overline{0}$ và 13 là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này.

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số, đặc số không. Gọi f là đa thức khác hằng có bậc n trên $\mathbb{K}$ và a là không điểm của f. Khi đó

$$f = (z - a)^m p(z),$$

với $p(a) \neq 0$ và m là bội của không điểm a của f.

Đặt $\mu^0 f(a) = m$. Kí hiệu $n(f)$ là số các không điểm của f kể cả bội, $d \in \mathbb{K}$ và l là số nguyên dương. Ta định nghĩa

$n(f, d) = n(f - d)$,

$n_l(f) = \sum\limits_{i=1}^{q} \min\{m_i, l\}$ ở đó $f = a(f - z_1)^{m_1} \dots (f - z_q)^{m_q}$,

$n_l(f, d) = n_l(f - d)$,

$n_0(f) = q$,

$n_0(f, d) = n_0(f - d)$.