ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỊCH XUÂN LUYẾN

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU VÀ ĐIỀU KIỆN CHÍNH QUY RÀNG BUỘC CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VỚI RÀNG BUỘC CÂN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỊCH XUÂN LUYẾN

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU VÀ ĐIỀU KIỆN CHÍNH QUY RÀNG BUỘC CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VỚI RÀNG BUỘC CÂN BẰNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN: PGS.TS. ĐỖ VĂN LƯU

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Các bài toán quy hoạch toán học với ràng buộc cân bằng (hay còn gọi là ràng buộc bù) là một lớp bài toán tối ưu khó. Các điều kiện Kuhn-Tucker cho các bài toán này phải được thiết lập với các điều kiện chính quy thích hợp với kiểu ràng buộc này. Nhiều công trình đã nghiên cứu về các điều kiện Fritz John, các điều kiện chính quy và các điều kiện Kuhn-Tucker cho lớp bài toán này. J.J. Ye ([11], 2005) đã thiết lập các điều kiện Fritz John cho bài toán tối ưu khả vi với ràng buộc cân bằng. Các điều kiện chính quy thích hợp được đưa vào [11] để dẫn điều kiện Kuhn-Tucker. C. Kanzow và A. Schwartz ([4], 2010) đã sử dụng cách tiếp cận Fritz John để dẫn các điều kiện tối ưu cần và đủ cho bài toán quy hoạch toán học khả vi với ràng buộc cân bằng. Đây là đề tài đã và đang được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy tác giả đã chọn đề tài: "Điều kiện tối ưu và điều kiện chính quy ràng buộc cho bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng".

2. Mục đích của đề tài

Luận văn trình bày các kết quả nghiên cứu về điều kiện tối ưu và các điều kiện chính quy cho bài toán tối ưu khả vi với ràng buộc cân bằng của Ye [11] và Kanzow - Schwartz [4] đăng trên tạp chí J. Math. Anal. Appl. vol 307 (2005) và SIAM J. Optim. vol 20 (2010).

3. Nội dung của luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: Điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán quy hoạch toán học với ràng buộc cân bằng của J.J. Ye

Trình bày các kết quả của J.J. Ye ([11],2005) về các loại điểm dừng thích hợp cho bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng. Chương 1 trình bày định lý về điều kiện M-dừng kiểu Fritz John, định lý về điều kiện M-dừng Kuhn-Tucker cho bài toán quy hoạch toán học khả vi với ràng buộc cân bằng. Điều kiện M-dừng đủ với các giả thiết về tính lồi suy rộng cũng được trình bày trong chương 1.

Chương 2: Điều kiện tối ưu và điều kiện chính quy cho bài toán quy hoạch toán học với ràng buộc cân bằng của C. Kanzow và Schwartz

Trình bày các kết quả về điều kiện tối ưu và các điều kiện chính quy thích hợp cho bài toán quy hoạch toán học khả vi với ràng buộc cân bằng MPEC của Kanzow - Schwartz ([4],2010). Chương 2 trình bày điều kiện cần Fritz John của Kanzow- Schwartz và các điều kiện chính quy cho MPEC. Điều kiện đủ để MPEC là M-dừng được trình bày với các điều kiện chính quy thích hợp.

Nhân dịp này tác giả xin được gửi lời cảm ơn đến tập thể các thầy cô giáo đã truyền đạt những tri thức quý giá trong thời gian tác giả học tập tại trường. Đặc biệt tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với thầy giáo PGS.TS. Đỗ Văn Lưu đã hướng dẫn, giúp đỡ tận tình và đầy trách nhiệm để tác giả hoàn thành luận văn này. Cuối cùng tác giả xin được cảm ơn Sở giáo dục - Đào tạo tỉnh Thái Nguyên, trường THPT Yên Ninh, gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ và tạo mọi điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và học tập.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015.

Học viên

Địch Xuân Luyến

Chương 1

Điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán quy hoạch toán học với ràng buộc cân bằng của J.J. Ye

Chương 1 trình bày các kết quả của J.J. Ye ([11],2005) về các loại điểm dừng, điều kiện M-dừng Fritz John, điều kiện M-dừng Kuhn-Tucker cho bài toán quy hoạch toán học với ràng buộc cân bằng khả vi. Với các giả thiết về tính suy rộng, điều kiện M- dừng Kuhn-Tucker trở thành điều kiện M-dừng đủ.

1.1. Điều kiện điểm dừng và điều kiện điểm chính quy

Xét bài toán với ràng buộc cân bằng (MPEC):

$$\begin{aligned} \text{(MPEC)}\ \min\ & f(z) \\ & g(z) \le 0, \quad h(z) = 0, \\ & G(z) \ge 0, \quad H(z) = 0, \quad G(z)^T H(z) = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

trong đó $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ kí hiệu phép chuyển vị. Để nghiên cứu bài toán (MPEC) người ta nghiên cứu dạng không đối xứng của bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng(OPCC):

$$
\begin{aligned}
\text{(OPPC)}\ \min\ & f(x,y) \\
& g(x,y) \leq 0, \quad h(x,y) = 0, \\
& G(x,y) \geq 0, \quad y \geq 0, \quad G(x,y)^T y = 0.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Bài toán này là trường hợp đặc biệt quan trọng nhất (trong đó $\Omega = \mathbb{R}^m_+$) của bài toán tối ưu với ràng buộc bất đẳng thức biến phân (OPVIC):

$$
\begin{aligned}
\text{(OPVIC)}\ \min\ & f(x,y) \\
& g(x,y) \leq 0, \quad h(x,y) = 0, \\
& y \in \Omega, \quad \langle G(x,y), y - y' \rangle \leq 0, \quad \forall y' \in \Omega,
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

trong đó
$f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^p$, $h : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^q$ và Ω là tập con lồi đóng của $\mathbb{R}^m$. Với một vectơ $d \in \mathbb{R}^n$ và tập chỉ số $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, d_i là thành phần thứ i của d và d_I là vectơ con gồm các thành phần d_i với $i \in I$.$\langle a, b\rangle$ hoặc $a^T b$ là tích vô hướng của vectơ a và b.

1.1.1. Điểm dừng và điều kiện chính quy

Với vectơ chấp nhận được z^* của MPEC, ta định nghĩa các tập sau đây:

$$
\begin{aligned}
& I_g := \{i : g_i(z^*) = 0\} \\
& \alpha := \alpha(z^*) := \{i : G_i(z^*) = 0, H_i(z^*) > 0\}, \\
& \beta := \beta(z^*) := \{i : G_i(z^*) = 0, H_i(z^*) = 0\}, \\
& \gamma := \gamma(z^*) := \{i : G_i(z^*) > 0, H_i(z^*) = 0\}.
\end{aligned}
$$

Tập β là một tập suy biến. Nếu β là tập rỗng, thì vectơ z^* được gọi là thỏa mãn điều kiện bù chặt. Ở đây ta xét trường hợp $\beta \neq \emptyset$. Ta xác định tập các phân hoạch của β bởi

$$P(\beta) := \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 \cup \beta_2 = \beta, \beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset\}.$$

Mỗi phân hoạch $(\beta_1, \beta_2) \in P(\beta)$ được ghép với bài toán MPEC:

$$\begin{aligned}(\text{MPEC})(\beta_1, \beta_2)\ \min\ & f(z)\\ & g(z) \leq 0,\ h(z) = 0,\\ & G_i(z) = 0,\ i \in \alpha \cup \beta_2,\ H_i(z) = 0,\ i \in \gamma \cup \beta_1,\\ & G_i(z) \geq 0,\ i \in \beta_1,\ H_i(z) \geq 0,\ i \in \beta_2.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Rõ ràng z^* là nghiệm tối ưu địa phương của MPEC nếu và chỉ nếu nó là nghiệm tối ưu của $MPEC(\beta_1, \beta_2)$ với mọi phân hoạch $(\beta_1, \beta_2) \in P(\beta)$.

Trước hết ta nhắc lại khái niệm nón tiếp tuyến.

Định nghĩa 1.1 (Nón tuyến tính)
Giả sử Z là tập chấp nhận được của MPEC và $z^* \in Z$. Nón tiếp tuyến của Z tại z^* là nón đóng được xác định bởi

$$T(z^*) := \{d \in R^n : \exists t_n \downarrow 0, d_n \to d \text{ sao cho } \quad z^* + t_n d_n \in Z,\ \forall n\}. \tag{1.5}$$

Khái niệm sau đây về điều kiện điểm dừng của MPEC được đựa vào trong [8]. Nó khác với điều kiện B-dừng [9] được xác định bởi

$$\nabla f(z^*)^T d \geq 0,\ \forall d \in T^{lin}_{MPEC}(z^*) \tag{1.6}$$

trong đó $T^{lin}_{MPEC}(z^*)$ là nón tuyến tính hóa MPEC được định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 1.2 (Điểm B-dừng)
Một điểm chấp nhận được z^* của MPEC được gọi là điểm dừng Boligand (B-dừng) nếu

$$\nabla f(z^*)^T d \geq 0,\ \forall d \in T(z^*). \tag{1.7}$$

1.1.2. Điều kiện dừng đối ngẫu

Không giống với quy hoạch phi tuyến thông thường chỉ có một điều kiện dừng đối ngẫu, tức là điều kiện Karush-Kuhn-Tucker MPEC, có một số khái niệm dừng. Bây giờ ra tóm tắt và trình bày mối liên hệ giữa các khái niệm đó.

Định nghĩa 1.3 (Điểm W-dừng).
Một điểm chấp nhận được z^* của MPEC được gọi là dừng yếu nếu tồn tại $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^{p+q+2m}$ sao cho điều kiện sau đúng:

$$\begin{aligned} 0 = \nabla f(z^*) + \sum_{i \in I_g} \nabla \lambda_i^g g_i(z^*) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^h \nabla h_i(z^*) \\ - \sum_{i=1}^{m} [\lambda_i^G \nabla G_i(z^*) + \lambda_i^H \nabla H_i(z^*)], \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\lambda_{I_g}^g \geq 0, \quad \lambda_\gamma^G = 0, \quad \lambda_\alpha^H = 0. \tag{1.9}$$

Dễ thấy rằng điều kiện W-dừng là điều kiện KKT cho bài toán MPEC chặt sau:

$$\begin{aligned} \text{(TMPEC)} \ \min\ & f(z) \\ & g(z) \leq 0,\ h(z) = 0, \\ & G_i(z) = 0,\ i \in \alpha,\ H_i(z) = 0,\ i \in \gamma, \\ & G_i(z) = 0,\ H_i(z) = 0,\ i \in \beta. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.4 (Điểm C-dừng)
Điểm chấp nhận được z^* của MPEC được gọi là điểm dừng Clarke nếu tồn tại $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^{p+q+2m}$ sao cho (1.8) - (1.9) và điều kiện sau đúng:

$$\forall i \in \beta, \quad \lambda_i^G \lambda_i^H \geq 0. \tag{1.10}$$

Theo [9. Bổ đề 1] điều kiện C-dừng là điều kiện KKT không trơn khi sử dụng grandient suy rộng Clarke [4] bằng cách phát biểu lại MPEC như một bài toán quy hoạch phi tuyến không trơn:

$$\begin{aligned} \min\ & f(z) \\ & g(z) \leq 0,\ h(z) = 0, \\ & G_i(z) = 0,\ i \in \alpha,\ H_i(z) = 0,\ i \in \gamma, \\ & \min\{G_i(z), H_i(z)\} = 0,\ i \in \beta. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Định nghĩa 1.5 (Điểm A-dừng).
Một điểm chấp nhận được z^* của MPEC được gọi là điểm dừng luân

phiên nếu tồn tại $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^{p+q+2m}$ sao cho (1.8) - (1.9) và điều kiện sau đúng:

$$\forall i \in \beta, \quad \lambda_i^G \geq 0, \quad \text{hoặc} \quad \lambda_i^H \geq 0. \tag{1.12}$$

Khái niệm điểm A-dừng được đưa vào bởi Flegel và Kanzow. Thực ra điều kiện A-dừng là điều kiện KKT cho $MPEC(\beta_1, \beta_2)$ với một phân hoạch $(\beta_1, \beta_2) \in P(\beta)$.

Định nghĩa 1.6 (Điểm M-dừng)
Điểm chấp nhận được z_* của MPEC được gọi là Mordukhovich-dừng nếu tồn tại $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^{p+q+2m}$ sao cho (1.8) - (1.9) và điều kiện sau đây đúng:

$$\forall i \in \beta, \quad \text{hoặc} \quad \lambda_i^G > 0, \lambda_i^H > 0 \quad \text{hoặc} \quad \lambda_i^G \lambda_i^H = 0. \tag{1.13}$$

Định nghĩa 1.7 (Điểm S-dừng).
Một điểm chấp nhận được z^* của MPEC được gọi là dừng mạnh nếu tồn tại $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^{p+q+2m}$ sao cho (1.8) - (1.9) và điều kiện sau đúng:

$$\forall i \in \beta, \quad \lambda_i^G \geq 0, \quad \lambda_i^H \geq 0. \tag{1.14}$$

Điều kiện S-dừng là điều kiện KKT cho MPEC nới lỏng:

$$\begin{aligned}
\text{(RMPEC)}\ \ & \min f(z) \\
& g(z) \leq 0,\ h(z) = 0, \\
& G_i(z) = 0,\ i \in \alpha,\ H_i(z) = 0,\ i \in \gamma, \\
& G_i(z) \geq 0,\ H_i(z) \geq 0,\ i \in \beta.
\end{aligned}$$