ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH VĂN DŨNG

MỘT SỐ THUẬT TOÁN GIẢI QUI HOẠCH PHÂN TUYẾN TÍNH DỰA TRÊN PHÉP BIẾN ĐỔI CHARNES - COOPER

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH VĂN DŨNG

MỘT SỐ THUẬT TOÁN GIẢI QUI HOẠCH PHÂN TUYẾN TÍNH DỰA TRÊN PHÉP BIẾN ĐỔI CHARNES - COOPER

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Mở đầu

Qui hoạch phân tuyến tính (*Linear Fractional Programming*, viết tắt là (*LFP*) là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) của một hàm phân thức afin (tỉ số hai hàm tuyến tính afin) với các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính.

Qui hoạch phân tuyến tính là một trường hợp riêng của qui hoạch phi tuyến, thường dùng để mô hình hoá các bài toán thực tế với một hay nhiều mục tiêu (chẳng hạn lợi nhuận / chi phí, sản phẩm / số lao động, v.v ...) và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành khác nhau của kỹ thuật, kinh tế, tài chính, v.v ... Một trong những bài toán qui hoạch phân thức sớm nhất là mô hình cân bằng kinh tế do Von Neumann nêu ra năm 1973 (xem [5]).

Charnes và Cooper [7] năm 1962 đã chỉ ra rằng qui hoạch phân tuyến tính có thể biến đổi tương đương về qui hoạch tuyến tính, nhờ phép đổi biến phi tuyến, gọi là phép biến đổi Charnes - Cooper. Về sau, phép biến đổi này được nhiều tác giả vận dụng và mở rộng. Nói riêng, các tác giả [4], [5] và [6] đã sử dụng nó để đưa ra thuật toán giải các dạng qui hoạch phân tuyến tính mở rộng như: qui hoạch phân tuyến tính với hệ số mục tiêu thay đổi, qui hoạch phân thức giá trị tuyệt đối, qui hoạch tích các phân thức tuyến tính, v.v ... Các thuật toán này đáng được chú ý tham khảo.

Sau khi học được các chuyên đề về giải tích lồi, tối ưu hóa và các kiến thức có liên quan, với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về những kiến thức đã học, các kiến thức mở rộng và ứng dụng của những kiến thức này, chúng tôi chọn đề tài luận văn: "*Một số thuật toán giải qui hoạch phân tuyến tính dựa trên phép biến đổi Charnes - Cooper*".

Mục đích chính của luận văn là tìm hiểu và trình bày về bài toán qui hoạch phân tuyến tính và một số bài toán mở rộng, phép biến đổi Charnes - Cooper đưa br qui hoạch phân tuyến tính về bài toán qui hoạch tuyến tính tương đương và giới thiệu các thuật toán dựa trên phép biến đổi này để giải một số bài toán qui hoạch phân tuyến tính mở rộng. Cụ thể là bài toán qui hoạch phân tuyến tính với các hệ số mục tiêu thay đổi và bài toán qui hoạch phân tuyến tính với giá trị tuyệt đối.

Luận văn được viết dựa chủ yếu trên các tài liệu tham khảo [2] - [4] và [6].

Nội dung của luận văn gồm hai chương.

Chương 1: Chương 1 "*Phép biến đổi Charnes - Cooper*" nhắc lại kiến thức về tập lồi đa diện và các tính chất đặc trưng của tập này; nhắc lại khái niệm hàm afin và các tính chất đáng chú ý của hàm afin, giới thiệu bài toán qui hoạch phân tuyến tính và cách tiếp cận Charnes - Cooper đưa bài toán phân tuyến tính về bài toán qui hoạch tuyến tính tương đương. Cuối chương, nêu thuật toán giải qui hoạch phân tuyến tính và đưa ra hai ví dụ minh họa cho hai tình huống tiêu biểu thường gặp của bài toán: Có nghiệm tối ưu hữu hạn và có nghiệm tối ưu tiệm cận với infimum hữu hạn đối với hàm mục tiêu của bài toán.

Chương 2: Chương 2 "*Bài toán qui hoạch phân thức với các hệ số mục tiêu thay đổi*" trình bày một mở rộng cách tiếp cận đưa ra trong [4] tìm nghiệm tối ưu cho bài toán qui hoạch phân tuyến với các hệ số mục tiêu thay đổi trong một khoảng. Thuật toán giải dùng phép biến đổi Charnes - Cooper và đưa bài toán về một qui hoạch tuyến tính với nhiều hơn một biến và hai ràng buộc so với bài toán ban đầu. Cuối chương dẫn ra các ví dụ số minh hoạ cho thuật toán giải trình bày.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn này còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quí thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn sau này.

Nhân dịp này, tác giả luận văn xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TS. Trần Vũ Thiệu, đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 01 năm 2016

Học viên

Đinh Văn Dũng

Chương 1

Phép biến đổi Charnes - Cooper

Chương này nhắc lại một số kiến thức cần thiết về tập lồi đa diện và các tính chất đáng chú ý của hàm phân thức afin (tỉ số của hai hàm tuyến tính afin), giới thiệu bài toán qui hoạch phân tuyến tính và phép biến đổi Charnes - Cooper đưa bài toán qui hoạch phân tuyến tính về bài toán qui hoạch tuyến tính. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1], [2], [3] và [6].

1.1 Tập lồi đa diện

Tập lồi đa diện là một dạng tập lồi có cấu trúc đơn giản và rất hay gặp trong lý thuyết tối ưu tuyến tính.

Định nghĩa 1.1. Một tập lồi mà là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng gọi là một *tập lồi đa diện*. Nói cách khác, đó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,\ i = 1,\ 2, \ldots, m, \tag{1.1}$$

nghĩa là tập các x nghiệm đúng $Ax \leq b$ với

$$a = (a_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}),\ b = (b_1, \ldots, b_m)^T.$$

Nhận xét 1.1. Do một phương trình tuyến tính có thể biểu diễn tương đương bằng hai bất phương trình tuyến tính, nên tập nghiệm của một hệ (hữu hạn) phương trình và bất phương trình tuyến tính cũng là một tập lồi đa diện:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1,\ 2, \ldots, k,$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,\ i = k+1, \ldots, m,$$

Một tập lồi đa diện có thể bị chặn hoặc không bị chặn (không giới nội). Một tập lồi đa diện bị chặn còn được gọi là một *đa diện lồi*. Các đa giác lồi theo nghĩa thông thường trong mặt phẳng hai chiều (tam giác, hình vuông, hình tròn, v.v ...) là những ví dụ cụ thể về đa diện lồi trong $\mathbb{R}^2$.

Cho D là một tập lồi đa diện xác định bởi hệ bất phương trình tuyến tính (1.1). Sau đây để đơn giản, ta giả thiết D không chứa đường thẳng nào (tức là $\nexists a,\ b \in D$ sao cho $\lambda a + (1-\lambda)b \in D$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$).

Hai yếu tố chính cấu tạo nên tập lồi đa diện D là các đỉnh và các cạnh vô hạn của D. Theo giải tích lồi [1, Hệ quả 2.6], có thể hiểu các khái niệm này như sau.

Định nghĩa 1.2. Điểm $x_0 \in D$ được gọi là một *đỉnh* của D nếu

$$\text{rank}\,\{a^i : \langle a^i, x^0\rangle = b_i\} = n\,(\text{với } a^i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}),\ i = 1, \ldots, m).$$

Định nghĩa tương đương: $x_0 \in D$ là một đỉnh của D nếu $\nexists x^1,\ x^2 \in D$, $x^1 \neq x^0$ hoặc $x^2 \neq x^0$, và $\nexists \lambda \in (0,1)$ sao cho $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, nói một cách khác: x^0 không thể là điểm nằm ở trong một đoạn thẳng nào đó nối hai điểm thuộc D.

Định nghĩa 1.3. Đoạn thẳng $[x^1, x^2]$, $x^1 \neq x^2$, được gọi là một *cạnh hữu hạn* của D nếu x^1, x^2 là các đỉnh của D và

$$\text{rank}\,\{a^i : \langle a^i, x^1\rangle = \langle a^i, x^2\rangle = b_i\} = n - 1.$$

Định nghĩa 1.4. Tia $\Gamma = \{x^0 + \lambda d : \lambda \geq 0\} \subseteq D$, trong đó $x^0 \in D$, $d \in \mathbb{R}^n$, được gọi là một *cạnh vô hạn* của D nếu

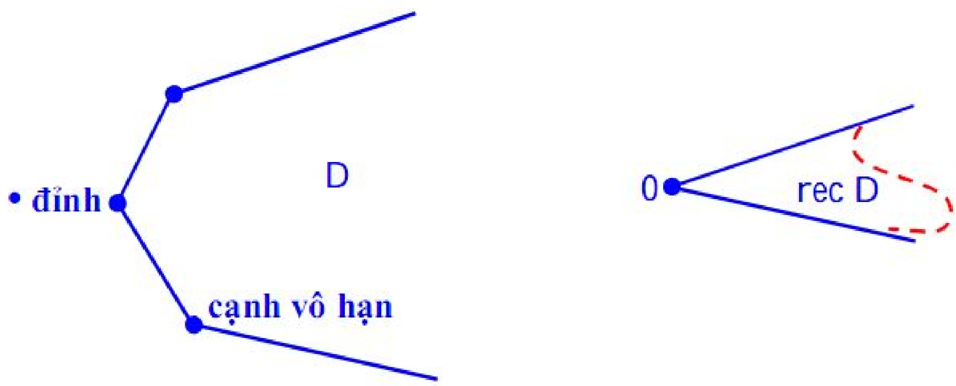
$$\text{rank}\,\{a^i : \langle a^i, x\rangle = b_i, \forall x \in \Gamma\} = n - 1.$$

Để hiểu rõ hơn về tập lồi đa diện ta cũng cần biết một số khái niệm sau đây.

Định nghĩa 1.5. Véctơ $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, được gọi là một *hướng lùi xa* của D nếu $\exists x \in D$ sao cho $\{x + \lambda d : \lambda \geq 0\} \subseteq D$. Tập hợp các hướng lùi xa của D cộng với gốc 0 tạo thành một nón lồi đóng, gọi là *nón lùi xa* của D, ký hiệu $rec\, D$.

Định nghĩa 1.6. Hướng lùi xa d của D được gọi là một *hướng cực biên* nếu không tồn tại hai hướng lùi xa khác d^1, d^2 sao cho $d = \lambda d^1 + \lambda_2 d^2$ với $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Có thể chứng minh được rằng tập lồi đa diện D không bị chặn khi và chỉ khi $rec\, D \neq \{0\}$, nghĩa là khi và chỉ khi D có ít nhất một hướng lùi xa.



Hình 1.1: Đỉnh, cạnh vô hạn của tập lồi đa diện

Trong các bài toán tối ưu, ta thường gặp tập lồi đa diện có dạng

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\} \text{ với } A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m\},$$

tức S là tập nghiệm không âm của một hệ (hữu hạn) bất phương trình tuyến tính.

Tập này không chứa đường thẳng nào (do $x \geq 0$) nên S có đỉnh [1, tr. 59]. Từ các định nghĩa nêu trên cho thấy:

a) Điểm $x^0 \in S$ là một đỉnh của S khi và chỉ khi hệ véctơ

$$\{a^k : \langle a^k, x^0 \rangle = b_k\} \cup \{e^k : x^0_k = 0\}$$

có hạng bằng n.

b) Các hướng cực biên (chuẩn hóa) của S là các nghiệm cơ sở của hệ $Ay \leq 0$, $e^T y = 1$, $y \geq 0$, trong đó $e^T = (1, \ldots, 1)$.

c) Giả sử tia $\Gamma = \{x^0 + \lambda d : \lambda \geq 0\}$, trong đó x^0 là một đỉnh và d là một hướng cực biên của S. Khi đó Γ là một cạnh vô hạn của S khi và chỉ khi

$$\text{rank}\left(\{a^k : \langle a^k, x \rangle = b_k, \forall x \in \Gamma\} \cup \{e^k : x_k = 0, \forall x \in \Gamma\}\right) = n - 1.$$

1.2 Hàm phân thức afin

Hàm phân thức afin thường gặp trong các bài toán tối ưu. Hàm này có dạng

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p^T x + \alpha}{q^T x + \beta},$$

trong đó $p,\ q \in \mathbb{R}^n$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ và $dom\, f = \{x \in \mathbb{R}^n : q^T x + \beta > 0\}$.

Ký hiệu S là tập lồi sao cho $q(x) = q^T x + \beta \neq 0$ với mọi $x \in S$. Nếu $q(x)$ có dấu khác nhau trên S, tức là có $x,\ y \in S$ sao cho $q^T x + \beta > 0$ và $q^T y + \beta < 0$ thì do hàm $q(x)$ liên tục nên tồn tại $z \in [x, y]$, tức $z \in S$, sao cho $q(z) = 0$. Vì thế, không giảm tổng quát, ta có thể giả thiết $q(x) > 0$ với mọi $x \in S$. Trường hợp $q(x) < 0$ với mọi $x \in S$ thì nhân cả tử số $p(x)$ và