ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

------------------------**

NGUYỄN VŨ TRUNG

BÀI TOÁN MOTZ VÀ MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM XẤP XỈ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60. 46. 01.12

Người hướng dẫn

TS. VŨ VINH QUANG

THÁI NGUYÊN – NĂM 2016

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, Tháng 12 năm 2015

Người viết luận văn

Nguyễn Vũ Trung

Xác nhận của trưởng khoa chuyên môn	Xác nhận của người hướng dẫn khoa học
TS. Nguyễn Thị Thu Thủy	**TS. Vũ Vinh Quang**

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của TS. Vũ Vinh Quang - Trường Đại học Công Nghệ Thông Tin và Truyền Thông. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng sau đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp cao học toán K7C (2014-2016) Trường Đại học Khoa Học – Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn. Xin trân trọng cảm ơn!

Thái nguyên, tháng 12 năm 2015

Người viết luận văn

Nguyễn Vũ Trung

CÁC KÝ HIỆU

Ω	Miền giới nội trong không gian $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclide n chiều.
$\partial\Omega$	Biên trơn Lipschitz.
$C^k(\Omega)$	Không gian các hàm có đạo hàm cấp k liên tục.
$L^2(\Omega)$	Không gian các hàm đo được bình phương khả tích.
$W^{1,p}(\Omega)$	Không gian Sobolev với chỉ số p.
$H^{1/2}(\partial\Omega)$	Không gian Sobolev với chỉ số 1/2
$H_0^1(\Omega)$	Không gian các hàm có vết bằng không trên $\partial\Omega$.
$H^{-1}(\Omega)$	Không gian đối ngẫu với $H_0^1(\Omega)$.
$H^{-1/2}(\partial\Omega)$	Không gian đối ngẫu với.
$\lVert\cdot\rVert_V$	Chuẩn xác định trên không gian V .
$(\cdot)_V$	Tích vô hướng xác định trên không gian V .
$C(\Omega)$	Hằng số Poincare.

MỞ ĐẦU

Một số bài toán trong cơ học các môi trường liên tục như các bài toán nghiên cứu về lý thuyết dao động qua mô hình hóa đều đưa về các bài toán biên cho phương trình elliptic cấp hai. Trong trường hợp khi môi trường là thuần nhất và điều kiện biên bình thường thì việc tìm nghiệm của bài toán có thể được thực hiện thông qua các phương pháp giải tích như các phương pháp tách biến, phương pháp hàm Green hoặc các phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ như các phương pháp sai phân hay phương pháp phần tử hữu hạn. Tuy nhiên khi điều kiện biên của bài toán là hỗn hợp mạnh tức là trên một đoạn biên trơn tồn tại 2 loại điều kiện biên dạng hàm (Dirichlet) và dạng đạo hàm (Neumann) thì trong thực tế điểm giao giữa 2 loại điều kiện này thường xảy ra các hiện tượng gãy nứt vật liệu. Các điểm giao này người ta thường gọi là các điểm kỳ dị. Trong trường hợp khi tồn tại các điểm kỳ dị thì các phương pháp kể trên không thể thực hiện được. Để giải quyết các bài toán này, người ta thường nghiên cứu theo 2 hướng sau đây:

- Xây dựng các hệ hàm riêng trực giao xung quanh lân cận của điểm kỳ dị dưới dạng tọa độ cực và từ đó tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán dưới dạng khai triển tổng hữu hạn của các hệ hàm riêng. Từ đó bài toán đưa về việc xác định các hệ số của khai triển thông qua việc giải các hệ đại số tuyến tính.

- Sử dụng các sơ đồ lặp chuyển bài toán có chứa điểm kỳ dị về các bài toán con không chứa điểm kỳ dị. Từ đó áp dụng các phương pháp sai phân để giải quyết các bài toán con qua đó xây dựng nghiệm của bài toán gốc ban đầu.

Xuất phát từ phân tích đó, mục tiêu nghiên cứu chính của luận văn là tìm hiểu về một mô hình bài toán Motz, đây là mô hình bài toán elliptic cấp hai có chứa 1 điểm kỳ dị mẫu mực, thường sử dụng để test các phương pháp xấp xỉ trên thế giới, nghiên cứu cơ sở của phương pháp khai triển tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán Motz, đồng thời nghiên cứu cơ sở của phương pháp lặp chuyển bài toán Motz về hai bài toán elliptic cấp hai, sử dụng phương pháp sai phân để xác định nghiệm của bài toán gốc. So sánh kết quả thực nghiệm của hai phương pháp. Các kết quả thực nghiệm được thực hiện trên máy tính điện tử.

Nội dung chính của luận văn là tiến hành tìm hiểu nghiên cứu cơ sở lý thuyết của các phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán biên elliptic cấp hai trong miền phức tạp hoặc điều kiện biên phức tạp, đặc biệt bằng phương pháp xác định nghiệm xấp xỉ thông qua các hệ hàm mẫu dạng tọa độ cực xung quanh các điểm kỳ dị, so sánh với phương pháp chia miền và lập trình tính toán thử nghiệm trên nền ngôn ngữ Matlab. Luận văn cấu trúc gồm 3 chương:

Chương 1: Đưa ra một số kiến thức cơ bản về không gian hàm và lý thuyết về phương trình elliptic, lý thuyết về các sơ đồ lặp. Cơ sở phương pháp chia miền và lý thuyết sai phân.

Chương 2: Trình bày mô hình của bài toán Motz và các phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ.

Chương 3: Một số kết quả thực nghiệm đối với bài toán Motz.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS Vũ Vinh Quang, em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành của mình đối với thầy. Em xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, Viện Toán Học đã tham gia giảng dạy, giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập nâng cao trình độ kiến thức. Tuy nhiên vì điều kiện thời gian và khả năng có hạn nên luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Em kính mong các thầy cô giáo và các bạn đóng góp ý kiến để đề tài được hoàn thiện hơn**.**

CHƯƠNG 1
CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

Nội dung chương 1 của luận văn trình bày một số kiến thức cơ bản về các không gian hàm, lý thuyết về các sơ đồ lặp và phương trình eliiptic cấp 2, lý thuyết về phương pháp sai phân. Đây là các kiến thức nền tảng, là cơ sở cho viện trình bày các nội dung trong chương 2 và chương 3 của luận văn. Các kiến thức được tham khảo trong các tài liệu [4, 5, 7, 8].

1.1 Không gian Sobolev

1.1.1 Không gian $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$

Giả sử Ω là một miền bị chặn trong không gian Euclid n chiều $\mathbb{R}^n$ và $\overline{\Omega}$ là bao đóng của Ω. Ta kí hiệu $C^k\left(\overline{\Omega}\right), \left(k = 0, 1, 2\ldots\right)$ là tập các hàm có đạo hàm đến cấp k kể cả k trong Ω, liên tục trong $\overline{\Omega}$. Ta đưa vào $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ chuẩn

$$\|u\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)} = \sum_{|\alpha| \le k} \max_{x \in \overline{\Omega}} \left|D^\alpha u\left(x\right)\right|.$$

Trong đó $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$ được gọi là đa chỉ số vectơ với các tọa độ nguyên không âm, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Sự hội tụ theo chuẩn đã cho là sự hội tụ đều trong $\overline{\Omega}$ của các hàm và tất cả đạo hàm của chúng đến cấp k. Rõ ràng tập $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ với chuẩn đã cho là không gian Banach.

1.1.2 Không gian $L^p(\Omega)$

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và p là một số thực dương. Ta kí hiệu $L^p(\Omega)$ là lớp các hàm đo được f xác định trên Ω sao cho:

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \qquad (*)$$

trong $L^p(\Omega)$ ta đồng nhất các hàm bằng nhau hầu khắp trên Ω. Như vậy các phần tử của $L^p(\Omega)$ là các lớp tương đương các hàm đo được thỏa mãn (*) và hai hàm tương đương nếu chúng bằng nhau hầu khắp trên Ω. Vì :

$$|f(x)+g(x)|^p \le \left(|f(x)+g(x)|\right)^p \le 2^p\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right)$$

nên rõ ràng $L^p(\Omega)$ là một không gian vectơ.

Ta đưa vào $L^p(\Omega)$ phiếm hàm $\|.\|_p$ được xác định bởi:

$$\|u\|_p = \left\{\int_\Omega |u(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

1.1.3 Không gian $W^{1,p}(\Omega)$

1.1.3.1 Định nghĩa

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Hàm $u(x)$ được gọi là khả tích địa phương trong Ω nếu $u(x)$ là một hàm trong Ω và với mỗi $x_0 \in \Omega$ đều tồn tại một lân cận w của x_0 để $u(x)$ khả tích trong w.