ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG ANH

# MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM VỚI ĐỐI SỐ BIẾN ĐỔI VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG ANH

# MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM VỚI ĐỐI SỐ BIẾN ĐỔI VÀ ÁP DỤNG

**Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp**
**Mã số: 60.46.01.13**

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học:**
**GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU**

**Thái Nguyên - 2015**

# Mục lục

# LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành luận văn này tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và sự biết ơn sâu sắc tới GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu. Thầy đã truyền đạt cho tôi những kiến thức, kinh nghiệm quý báu trong học tập và là thầy trực tiếp hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn:

- Ban giám hiệu, Phòng đào tạo sau đại học, khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô đã tham gia giảng dạy cho lớp Cao học toán K7A.

- Sở giáo dục & Đào tạo tỉnh Tuyên Quang, Ban giám hiệu trường THPT Chuyên Tuyên Quang, bạn bè đồng nghiệp và gia đình đã quan tâm động viên, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu.

# DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$\forall, \exists$ : Các ký hiệu của logic

$\mathbb{R}$ : Tập hợp các số thực

$\mathbb{R}^+$ : Tập hợp các số thực dương

$\mathbb{R}^-$ : Tập hợp các số thực âm

$\mathbb{Q}$ : Tập hợp các số hữu tỷ

$\mathbb{Z}$ : Tập hợp các số nguyên

$\mathbb{Z}^+$ : Tập hợp các số nguyên dương

$\mathbb{N}$ : Tập hợp các số tự nhiên

$x \in M$ : $x$ là phần tử của $M$

$\cap, \cup, \subset, \supset$ : là các phép toán trên tập hợp

# MỞ ĐẦU

Phương trình hàm là một trong những chuyên đề quan trọng thuộc chương trình chuyên toán trong các trường THPT chuyên. Trong các kỳ thi Olympic toán quốc gia, khu vực và quốc tế thường xuất hiện các dạng toán khác nhau có liên quan đến phương trình hàm. Chúng được xem như là những bài toán khó và mới mẻ đối với học sinh THPT. Những tài liệu tham khảo dành cho học sinh về lĩnh vực này không nhiều. Đặc biệt trong các tài liệu sách giáo khoa dành cho học sinh THPT thì phương trình hàm với đối số biến đổi chưa được trình bày một cách hệ thống và đầy đủ.

Xuất phát từ thực tế đó, trong luận văn này tác giả trình bày một cách hệ thống những lớp phương trình hàm với đối số biến đổi và phương pháp giải chúng. Đồng thời nêu ra một số áp dụng của phương pháp giải phương trình hàm với đối số biến đổi vào lớp các phương trình hàm đa thức đại số và lượng giác.
Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia thành ba chương:

**Một số kiến thức cơ bản**

- *Tính trù mật*
- *Tính chất cơ bản của hàm số*
- *Một số đặc trưng hàm của hàm số sơ cấp*
- *Các phương trình hàm dạng Cauchy*
- *Một số phương pháp giải phương trình hàm*

**Phương trình hàm với các phép biến hình sơ cấp**

- *Biểu diễn một số lớp hàm bất biến với các phép biến hình*
- *Phương trình hàm với dịch chuyển bậc nhất và phân tuyến tính*
- *Một số lớp phương trình hàm với đối số biến đổi*

**Một số áp dụng**

*- Phương trình hàm trong lớp hàm đa thức*

*- Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác .*

*Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2015*

Tác giả

**Nguyễn Thị Phương Anh**

# Chương 1

# MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

## 1.1 Tính trù mật

Tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ được gọi là trù mật trong $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ đều tồn tại $a \in A$ sao cho $x < a < y$.
Một số ví dụ về tập trù mật

a) $\mathbb{Q}$ là trù mật trong $\mathbb{R}$.

b) Tập hợp $A = \left\{\dfrac{m}{2^n},\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ là tập trù mật trong $\mathbb{R}$ .

## 1.2 Tính chất cơ bản của hàm số

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset \mathbb{R}$ và tập giá trị $\mathbb{R}(f) \subset \mathbb{R}$.

### 1.2.1 Hàm số chẵn, hàm số lẻ

**Định nghĩa 1.1** (Xem [4])**.**
a) $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên $M$, $M \subset D(f)$ (gọi tắt là hàm chẵn trên $M$) nếu $\forall x \in M \Rightarrow -x \in M$ và $f(-x) = f(x)\,, \ \forall x \in M$.

b) $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên $M$, $M \subset D(f)$ (gọi tắt là hàm lẻ trên $M$) nếu $\forall x \in M \Rightarrow -x \in M$ và $f(-x) = -f(x)\,, \ \forall x \in M$.

### 1.2.2 Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

**Định nghĩa 1.2** (Xem [4])**.**
a) Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn cộng tính chu kì $a$ $(a > 0)$ trên $M$ nếu $M \subset D(f)$ và $\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x+a) = f(x)\,, \ \forall x \in M. \end{cases}$

b) Cho $f(x)$ là một hàm tuần hoàn cộng tính trên $M$. Khi đó $T\ \ (T > 0)$ được gọi là chu kì cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $T$ mà không là hàm tuần hoàn cộng tính với bất cứ chu kì nào bé hơn $T$.

**Định nghĩa 1.3** (Xem [4])**.**

a) Hàm số $f(x)$ được gọi là phản tuần hoàn cộng tính chu kì $b\ \ (b > 0)$ trên $M$ nếu $M \subset D(f)$ và $\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm b \in M \\ f(x+b) = -f(x), \ \ \forall x \in M. \end{cases}$

b) Cho $f(x)$ là một hàm phản tuần hoàn cộng tính trên $M$. Khi đó $T\ \ (T > 0)$ được gọi là chu kì cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ phản tuần hoàn cộng tính với chu kì $T$ mà không là hàm phản tuần hoàn cộng tính với bất cứ chu kì nào bé hơn $T$.

### 1.2.3 Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính

**Định nghĩa 1.4** (Xem [4])**.** $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì $a\ \ (a \notin \{0; 1; -1\})$ trên $M$ nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \ \ \forall x \in M. \end{cases}$$

**Định nghĩa 1.5** (Xem [4])**.** $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kì $a\ \ (a \notin \{0; 1; -1\})$ trên $M$ nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = -f(x), \ \ \forall x \in M. \end{cases}$$

## 1.3 Một số đặc trưng hàm của hàm số sơ cấp

Trong phần này ta nêu những đặc trưng của một số hàm số sơ cấp thường gặp trong chương trình phổ thông. Nhờ các đặc trưng hàm này mà ta có thể dự đoán kết quả của các phương trình hàm tương ứng cũng như có thể đề xuất những dạng bài tập tương ứng với các đặc trưng hàm đó.

Các hàm số được xét trong phần này thoả mãn điều kiện liên tục trên toàn miền xác định của hàm số.

1. Hàm bậc nhất: $f(x) = ax + b (a \neq 0, b \neq 0)$ có tính chất

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$