ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

<u>TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC</u>

NGUYỄN THỊ TUYẾN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM KHÔNG ĐIỂM CHUNG CỦA MỘT HỌ HỮU HẠN TOÁN TỬ *j*-ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN-2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ TUYẾN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM KHÔNG ĐIỂM CHUNG CỦA MỘT HỌ HỮU HẠN TOÁN TỬ *j*-ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. TRƯƠNG MINH TUYÊN

THÁI NGUYÊN-2015

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Trương Minh Tuyên, từ đáy lòng mình tôi xin được bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, các thầy, cô trong khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, cũng như các thầy, cô đã tham gia giảng dạy, truyền thụ những kiến thức quý báu cho tôi trong suốt thời gian tôi học tập và nghiên cứu tại Trường.

Tôi xin chân thành cảm ơn tới lãnh đạo Ủy ban Nhân dân tỉnh Hưng Yên, Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Hưng Yên, Ban giám hiệu trường THPT Trần Hưng Đạo cùng các đồng nghiệp và gia đình đã tạo mọi điều kiện giúp đỡ, động viên tôi trong thời gian học tập và làm luận văn.

Tác giả

Một số ký hiệu và viết tắt

E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\text{argmin}_{x\in X} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm F trên X
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\delta_E(\varepsilon)$	mô đun lồi của không gian Banach E
$Fix(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M
$o(t)$	vô cùng bé bậc cao hơn t

Mục lục

Mở đầu

Cho E là một không gian Banach, bài toán xác định không điểm của lớp toán tử loại đơn điệu có vai trò quan trọng trong lĩnh vực giải tích phi tuyến và tối ưu hóa và một số ngành khoa học khác như vật lý, kinh tế, y học... Chẳng hạn như bài toán chấp nhận lồi trong không gian Hilbert H, tìm một phần tử $x^* \in \cap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$, có thể đưa về bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn toán tử đơn điệu cực đại A_i, là dưới vi phân của hàm chỉ của tập C_i, hay bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ không giãn trong không gian Banach tương đương với bài toán xác định không điểm của hột họ toán tử j-đơn điệu ... Do đó, vấn đề nghiên cứu các phương pháp giải hệ phương trình với toán tử loại đơn điệu đã và đang thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều người làm toán trên thế giới.

Khi $A: \ H \longrightarrow 2^H$ một toán tử đơn điệu cực đại trên không gian Hilbert H (trong không gian Hilbert khái niệm j-đơn điệu và đơn điệu là trùng nhau), thì R. T. Rockafellar [17] đã đề xuất phương pháp điểm gần kề để xác định dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$c_n A x_{n+1} + x_{n+1} \ni x_n, \ x_0 \in H, \tag{0.1}$$

ở đây $c_n > c_0 > 0$. Tuy nhiên, việc áp dụng phương pháp lặp (0.1) chỉ thu được sự hội tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ về một không điểm của A.

Năm 2006 tác giả H. K. Xu [24] và năm 2009 các tác giả Y. Song, C. Yang [19] đã đề xuất và nghiên cứu một cải biên của phương pháp điểm gần kề cho bài toán xác định không điểm của toán tử đơn điệu cực đại A trong không gian Hilbert, ông đã chỉ ra sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_{n+1} = J_{r_n}^A (t_n u + (1 - t_n) x_n + e_n), \ n = 0, 1, 2, ... \tag{0.2}$$

với một số điều kiện thích hợp đặt lên dãy số $\{t_n\}$ và dãy sai số tính toán trong mỗi bước lặp $\{e_n\}$, trong đó $J_{r_n}^A = (I + r_n A)^{-1}$.

Việc nghiên cứu mở rộng kết quả của H. K. Xu cho bài toán xác định không điểm của một hay hữu hạn toán tử j-đơn điệu cũng đã thu hút sự quan tâm của nhiều người làm toán, như: D. D. Sahu và J. C. Yao [18], T. M. Tuyen [22, 11]...

Mục đích của đề tài này là trình bày lại một số phương pháp xác định không điểm của một họ hữu hạn toán tử j-đơn điệu trong không gian Banach. Cụ thể, đề tài tập trung giải quyết các vấn đề sau:

1. Trình bày sự hội tụ yếu của phương pháp điểm gần kề kết hợp với phương pháp lặp Mann và sự hội tụ mạnh của phương pháp điểm gần kề kết hợp với phương pháp lặp Halpern cho bài toán xác định không điểm của một họ hữu hạn toán tử j-đơn điệu trong không gian Banach với tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu liên tục yếu theo dãy;

2. Trình bày phương pháp prox-Tikhonov hiệu chỉnh với phương pháp xấp xỉ mềm dựa trên toán tử Mier-Keeler co cho bài toán xác định không điểm của một họ hữu hạn toán tử j-đơn điệu trong không gian Banach với chuẩn khả vi Gâteaux đều.

Luận văn được chia làm hai chương chính. Chương 1 là chương có tính chất chuẩn bị, nhằm trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Banach lồi đều, không gian Banach có chuẩn khả vi Gâteaux đều, ánh xạ đối ngẫu, toán tử j-đơn điệu và giới hạn Banach. Chương 2 của luận văn tập chung trình bày lại một số phương pháp cải tiến của phương pháp điểm gần kề cho bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn toán tử j-đơn điệu, cùng với một ví dụ số đơn giản được tính toán bằng phần mềm Matlab, nhằm minh họa thêm cho các phương pháp.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này gồm 3 mục. Mục 1.1 giới thiệu về không gian Banach lồi đều và không gian Banach có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Mục 1.2 trình bày về ánh xạ đối ngẫu, toán tử j-đơn điệu và giới hạn Banach, cùng với một số tính chất cơ bản của chúng. Mục 1.3, giới thiệu một số bổ đề cần sử dụng trong chứng minh các định lý ở chương sau của luận văn.

1.1. Không gian Banach lồi đều và không gian Banach có chuẩn khả vi Gâteaux đều

Trước hết, ta nhắc lại khái niệm không gian Banach phản xạ.

Định nghĩa 1.1. Một không gian Banach E được gọi là không gian phản xạ, nếu với mọi phần tử x^{**} của không gian liên hợp thứ hai E^{**} của E, đều tồn tại phần tử x thuộc E sao cho

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) \text{ với mọi } x^* \in E.$$

Mệnh đề 1.1. [1] *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

i) *E là không gian phản xạ.*

ii) *Mọi dãy bị chặn trong E, đều có một dãy con hội tụ yếu.*

Định nghĩa 1.2. Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in E, x \neq y$ mà $\|x\| = 1, \|y\| = 1$ ta có

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Chú ý 1.1. Định nghĩa 1.2 còn có thể phát biểu dưới các dạng tương đương sau: Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in S_E$ thỏa mãn $\dfrac{\|x+y\|}{2} = 1$, suy ra $x = y$ hoặc với mọi $x, y \in S_E$ và $x \neq y$ ta có $\|tx + (1-t)y\| < 1$ với mọi $t \in (0,1)$, trong đó

$$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Định nghĩa 1.3. Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $x, y \in E$ mà $\|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon$ ta luôn có

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Dễ thấy rằng nếu E là không gian Banach lồi đều thì nó là không gian Banach lồi chặt. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng, ví dụ dưới đây chỉ ra điều đó.

Ví dụ 1.1. [1] Xét $X = c_0$ (không gian các dãy số hội tụ về không) với chuẩn $\|.\|_\beta$ xác định bởi

$$\|x\|_\beta = \|x\|_{c_0} + \beta\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{i^2}\Big)^{1/2},\ x = (x_i) \in c_0.$$

Khi đó, $(X, \|.\|_\beta),\ \beta > 0$ là một không gian lồi chặt nhưng không là không gian lồi đều.

Để đo tính lồi của không gian Banach E, người ta đưa vào khái niệm sau:

Định nghĩa 1.4. Cho E là một không gian Banach. Khi đó, hàm $\delta_E(\varepsilon) : [0, 2] \longrightarrow [0, 1]$ được gọi là mô đun lồi của E nếu

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\Big\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon\Big\}.$$

Nhận xét 1.1. Mô đun lồi của không gian Banach E là hàm số xác định, liên tục và tăng trên đoạn $[0; 2]$. Không gian Banach E lồi chặt khi và chỉ khi $\delta_E(2) = 1$. Ngoài ra, không gian Banach E là lồi đều khi và chỉ khi $\delta_E(\varepsilon) > 0,\ \forall \varepsilon > 0$.

Mệnh đề 1.2. [1] *Mọi không gian Banach lồi đều bất kì là không gian phản xạ.*

Định nghĩa 1.5. Cho E là không gian tuyến tính định chuẩn, chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux tại điểm $x_0 \in S_E$ nếu với mỗi $y \in S_E$, tồn tại giới hạn

$$\frac{d}{dt}(\|x_0 + ty\|)_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}. \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.6. Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn. Khi đó:

a) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux nếu nó khả vi Gâteaux tại mọi $x \in S_E$.

b) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux đều nếu với mọi $y \in S_E$ giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x \in S_E$.

Định nghĩa 1.7. Không gian Banach E được gọi là thỏa mãn điều kiện của Opial nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset E$ thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x \in E$, ta đều có

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|,$$

với mọi $y \in E$ mà $y \neq x$.

Ví dụ 1.2. Mọi không gian Hilbert H đều thỏa mãn điều kiện của Opial.

1.2. Ánh xạ đối ngẫu, toán tử $j-$đơn điệu và giới hạn Banach

1.2.1. Ánh xạ đối ngẫu

Dưới đây, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ đối ngẫu tương ứng với hàm cỡ φ.

Định nghĩa 1.8. Một hàm liên tục, đơn điệu tăng $\varphi :\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ được gọi là một hàm cỡ nếu $\varphi(0) = 0$ và $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

Định nghĩa 1.9. Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn và φ là một hàm cỡ. Khi đó, ánh xạ $J_\varphi :\ E \longrightarrow 2^{E^*}$ xác định bởi

$$J_\varphi(x) = \{f \in E^* :\ \langle x, f\rangle = \|x\|.\|f\|,\ \|f\| = \varphi(\|x\|)\},\ x \in E$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu ứng với hàm cỡ φ.

Định nghĩa 1.10. Ánh xạ đối ngẫu J_φ ứng với hàm cỡ φ của không gian Banach E được gọi là có tính liên tục yếu theo dãy nếu J_φ là đơn trị và nếu $\{x_n\} \subset E$ thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x$, thì $J_\varphi(x_n)$ hội tụ *yếu về $J_\varphi(x)$.