BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÙI VIỆT HƯƠNG

XÁC ĐỊNH QUY LUẬT BIÊN PHI TUYẾN VÀ XÁC ĐỊNH NGUỒN TRONG CÁC QUÁ TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2015

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÙI VIỆT HƯƠNG

XÁC ĐỊNH QUY LUẬT BIÊN PHI TUYẾN VÀ XÁC ĐỊNH NGUỒN TRONG CÁC QUÁ TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. ĐINH NHO HÀO

THÁI NGUYÊN – 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Đinh Nho Hào. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là những kết quả mới và chưa từng được ai công bố trong các công trình nào khác.

Tác giả

Bùi Việt Hương

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học tận tình, quý báu và nghiêm khắc của GS.TSKH. Đinh Nho Hào. Thầy đã đặt bài toán và dành nhiều công sức, từng bước dẫn dắt tôi dần làm quen với công việc nghiên cứu khoa học, động viên khích lệ tôi vượt lên những khó khăn trong học tập và cuộc sống. Từ tận đáy lòng, em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới Thầy và sẽ cố gắng phấn đấu hơn nữa để xứng đáng với công lao của Thầy.

Trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án, tác giả luôn nhận được sự quan tâm, giúp đỡ của GS. TSKH. Hà Huy Bảng, PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn, GS. TSKH Nguyễn Minh Trí, TS. Nguyễn Văn Ngọc, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ sự kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn anh chị em trong nhóm nghiên cứu của Thầy – GS. TSKH. Đinh Nho Hào đã có những trao đổi và ý kiến đóng góp hữu ích thông qua các xê mi na nhóm; Chân thành cảm ơn TS. Nguyễn Trung Thành, TS. Phan Xuân Thành, NCS. Nguyễn Thị Ngọc Oanh đã hướng dẫn tác giả về kỹ thuật lập trình khi thử nghiệm việc giải số.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám đốc, Ban Đào tạo (bộ phận sau đại học) Đại học Thái Nguyên; Ban Giám hiệu, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, phòng Đào tạo (bộ phận sau đại học) trường Đại học Sư phạm; Ban giám hiệu, Ban chủ nhiệm khoa Toán – Tin, trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Xin chân thành cảm ơn các anh chị em NCS chuyên ngành Toán Giải tích, bạn bè đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên, trao đổi và đóng góp những ý kiến quý báu cho tác giả.

Luận án sẽ không thể hoàn thành nếu thiếu sự cảm thông, giúp đỡ của những người thân trong gia đình. Tác giả xin kính tặng Gia đình thân yêu niềm vinh hạnh to lớn này.

Tác giả

Bùi Việt Hương

Mục lục

Một số ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian véctơ Euclide thực $n-$chiều
V^*	không gian đối ngẫu của không gian V
$C(\bar{\Omega})$	không gian các hàm liên tục trong $\bar{\Omega}$
$C([0,T],L^2(\Omega))$	không gian các hàm liên tục trên $[0,T]$ nhận giá trị trong $L^2(\Omega)$
$C^1(\bar{Q})$	không gian các hàm khả vi liên tục trong $\bar{Q}$
$C^{\gamma,\gamma/2}$	không gian Hölder với số mũ $\gamma/2, \gamma \in (0,1)$
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm khả tích bậc p trong $\Omega, 1 \leq p < \infty$
$L^2_I(\cdot)$	không gian các hàm thuộc $L^2(\cdot)$ nhận giá trị trong I
$H^1(\Omega)$	không gian các hàm thuộc $L^2(\Omega)$ có đạo hàm riêng yếu thuộc $L^2(\Omega)$
$H^1_0(\Omega)$	bao đóng của không gian $C_0^\infty(\Omega)$ trong không gian $H^1(\Omega)$
$H^{1,0}(Q)$	không gian các hàm $y \in L^2(Q)$ có đạo hàm riêng yếu cấp một theo biến x_i thuộc $L^2(Q)$
$H^{1,1}(Q)$	không gian các hàm $y \in L^2(Q)$ có đạo hàm riêng yếu cấp một theo biến x_i và đạo hàm suy rộng theo biến t thuộc $L^2(Q)$
$H^{1,0}_I(\cdot)$	không gian các hàm thuộc $H^{1,0}(\cdot)$ nhận giá trị trong I
$\text{ess}\sup\limits_{x\in E}\lvert y(x)\rvert$	$:= \inf\limits_{\lvert F\rvert=0}(\sup\limits_{x\in E\setminus F}\lvert y(x)\rvert)$
$L^\infty(\Omega)$	không gian các hàm bị chặn và đo được theo nghĩa Lebesgue với chuẩn được xác định bởi $\lVert y(x)\rVert_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess}\sup_{x\in E}\lvert y(x)\rvert$

Mở đầu

Các quá trình truyền nhiệt hay khuếch tán thường được mô hình hóa bằng bài toán biên cho phương trình parabolic: khi miền vật lý, hệ số của phương trình, điều kiện ban đầu và điều kiện biên được biết, người ta nghiên cứu bài toán biên này và dựa vào nghiệm của bài toán đưa ra một dự đoán về hiện tượng đang nghiên cứu. Đây là *bài toán thuận* cho quá trình mà ta đang xét. Tuy nhiên, trong thực tế, nhiều khi miền vật lý, hoặc hệ số của phương trình, hoặc điều kiện biên, điều kiện ban đầu không được biết cụ thể mà ta phải xác định chúng qua các đo đạc gián tiếp, để qua đó nghiên cứu lại quá trình. Đây chính là những *bài toán ngược* với bài toán thuận được nói ở trên và là chủ đề sôi động trong mô hình hóa toán học và lý thuyết phương trình vi phân hơn 100 năm qua [1], [5], [9], [33], [46], [47], [70]. Hai điều kiện quan trọng để mô hình hóa một quá trình truyền nhiệt đó là quy luật trao đổi nhiệt trên biên và nguồn. Cả hai điều kiện này đều do tác động ở bên ngoài và không phải lúc nào cũng được biết trước, do đó trong những trường hợp này, ta phải xác định chúng qua các đo đạc gián tiếp và đó là nội dung của luận án này. Luận án gồm hai phần, phần đầu nghiên cứu bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt (nói chung là phi tuyến) trên biên qua đo đạc trên biên và phần thứ hai nghiên cứu bài toán xác định nguồn (tạo ra quá trình truyền nhiệt hay khuếch tán) qua các quan sát khác nhau.

Có rất nhiều các hiện tượng vật lý xảy ra trong điều kiện nhiệt độ, áp suất cao hoặc trong các môi trường khắc nghiệt như: các buồng đốt, các tua bin khí, các quá trình làm nóng, làm nguội thép và trong quá trình dập tắt khí trong lò,... mà ở đó cả nguồn nhiệt và khối lượng nhiệt trao đổi đều chưa biết, hoặc quá trình trao đổi nhiệt trên biên chưa biết tuân theo quy luật nào (quy luật truyền nhiệt tuyến tính của Newton hay quy luật bức xạ nhiệt bậc bốn của Stefan–Boltzmann chẳng hạn). Khi đó, chúng ta mô hình hóa các quá trình truyền nhiệt này như các bài toán ngược xác định quy luật truyền nhiệt không tuyến tính ở trên biên hoặc xác định nhiệt độ phụ thuộc vào hệ số truyền nhiệt. Trong một số lĩnh vực ứng dụng khác, các bài toán này có thể xem như các dạng mô hình về sự khuếch tán khí trong các phản ứng hóa học chưa biết trên bề mặt vật chất hay mật độ dân số tại vùng giáp ranh với quy luật di trú chưa biết [88].

Năm 1989, Pilant và Rundell [69] xét bài toán xác định quy luật truyền nhiệt $g(\cdot)$ và nhiệt độ $u(x,t)$ trong bài toán giá trị biên ban đầu một chiều

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \gamma(x,t), & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) = g(u(0,t)), & 0 \le t \le T, \\ -u_x(1,t) = g(u(1,t)), & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{0.1}$$

từ điều kiện quan sát bổ sung

$$u(0,t) = h(t), \tag{0.2}$$

trong đó γ, u_0 và h là các hàm cho trước, tương ứng với nguồn nhiệt, nhiệt độ tại thời điểm ban đầu và nhiệt độ trên biên. Từ phương trình (0.1) ta thu được $u_x(0,t) = g(h(t))$ với $t \in [0,T]$. Với một số điều kiện nhất định, các tác giả đã chứng minh tồn tại duy nhất cặp (u,g) của phương trình (0.1) trong khoảng $0 \le t \le t^*$, với $t^* \in (0,T]$ nào đó. Các tác giả cũng đã đề xuất phương pháp lặp để giải bài toán ngược này và thử nghiệm thuật toán trên máy tính. Sau đó, vào năm 1990, Rundell và Yin [79] đã nghiên cứu bài toán tương tự nhưng trong trường hợp nhiều chiều. Cụ thể, cho $T > 0$ và $Q = \Omega \times (0,T]$ với Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^n$, các tác giả xét bài toán tìm cặp hàm $u(x,t)$ và $g(s)$ xác định tương ứng trên $\overline{Q}$ và $[A,B]$, thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \gamma(x,t) & \text{trong } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{trong } \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(u) + \varphi & \text{trên } S := \partial\Omega \times [0,T], \end{cases} \tag{0.3}$$

với quan sát bổ sung tại một điểm trên biên

$$u(\xi_0, t) = h(t), \quad t \in [0, T], \tag{0.4}$$

trong đó các hàm γ, u_0, φ và h cho trước, ξ_0 là một điểm cố định trên biên $\partial\Omega$ của Ω, ν là véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên biên S, $A = \min_{\overline{Q}} u(x,t)$ và $B = \max_{\overline{Q}} u(x,t)$. Với một số giả thiết nhất định, các tác giả đã đưa ra đánh giá ổn định cho hàm g và từ đó họ thu được tính duy nhất nghiệm của bài toán (0.3). Ta thấy, hàm g chỉ có thể xác định trong khoảng $[A, B]$ chứ không xác định trên toàn trục thực $\mathbb{R}$. Vì thế vào năm 1999, Choulli [14] đã đặt ra một câu hỏi rất tự nhiên: chúng ta phải cần đến bao nhiêu đo đạc để tìm lại hàm $g(s)$ với $s \in \mathbb{R}$? Choulli đã chứng minh rằng: (i) nếu tất cả các đo đạc trên biên đều thực hiện được và hàm g' bị chặn thì bài toán có nghiệm duy nhất; (ii) nếu các đo đạc trên biên được thực hiện trong các không gian vectơ một chiều thì ta cũng có nghiệm duy nhất, và ông đã chứng minh hàm g biểu diễn được dưới dạng $g = g_0 + g_1$, trong đó g_0 là hàm đã biết còn g_1 là hàm chưa biết và không có điểm tụ 0. Theo hướng nghiên cứu này, các tác giả của [18] đã ra phương pháp tuyến tính hóa tự nhiên (natural linearization) để xác định lại quy luật truyền nhiệt không tuyến tính $g(u)$ trong (0.3) với giả thiết là nhiệt độ trên toàn bộ biên S đo được, thay vì các đo đạc tại từng điểm như trong (0.4).

Trong một chuỗi các bài báo ([51], [80] – [86]), Tröltzsch và Rösch cũng đã nghiên cứu bài toán tương tự. Cụ thể, các tác giả xét bài toán xác định hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$ trong bài toán giá trị biên ban đầu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{trong } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{trên } \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma(u(\xi,t))(u_\infty - u(\xi,t)) & \text{trên } S = \partial\Omega \times [0,T], \end{cases} \tag{0.5}$$

trong đó u_∞ là nhiệt độ môi trường xung quanh, được biết là một hằng số cho trước, từ các điều kiện quan sát bổ sung khác nhau như: $u(x,t)$ được cho trên cả miền Q, hoặc $u(x,t_i)$ được cho tại một thời điểm cố định $t_i, i = 1, \dots, L$, [80], [86], hoặc u cho trên toàn bộ biên S [83]. Các tác giả đã chuyển bài toán ngược về bài toán điều khiển tối ưu, rồi chứng minh tính khả vi Fréchet của phiếm hàm cần cực tiểu hóa, sau đó đã sử dụng phương pháp lặp để giải số