ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN TRẦN THÀNH

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ TÁCH TRONG TỐI ƯU HÓA

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN TRẦN THÀNH

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ TÁCH TRONG TỐI ƯU HÓA

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn: GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng, nội dung của bản luận văn này do chính tôi đã tổng hợp từ các tài liệu được nêu trong phần tài liệu tham khảo. Luận văn không phải là bản sao chép lại của bất kỳ tài liệu nào khác.

Thái Ngyên, tháng 2 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Trần Thành

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của **GS. TSKH. Lê Dũng Mưu**. Trước tiên, Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, người đã đặt bài toán và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tôi. Đồng thời tôi cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán, khoa Sau đại học - Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tôi để tôi có thể hoàn thành bản luận văn này. Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến các bạn trong lớp Cao học Toán K21, đã chia sẻ động viên và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn.

Tôi cũng vô cùng biết ơn Bố, mẹ, anh, chị, em trong gia đình của mình đã cảm thông chia sẻ cùng tôi trong hơn một năm qua để tôi có thể học tập và hoàn thành luận văn này.

Do thời gian ngắn và khối lượng kiến thức lớn nên bản luận văn sẽ khó tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè, tôi xin chân thành cảm ơn!

MỤC LỤC

BẢNG KÝ HIỆU

$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclide n - chiều trên trường số thực;
$\mathbb{R}$	Trục số thực;
x_i	Tọa độ thứ i của x;
a^T	Véc-tơ hàng (chuyển vị của a)
$<x,y> = x^T y$	Tích vô hướng cả hai véc-tơ x và y;
$\lVert x \rVert$	Chuẩn Euclide của x;
[x,y]	Đoạn thẳng đóng nối x và y;
(x,y)	Đoạn thẳng mở nối x và y;
$\overline{C}$	Bao đóng của C;
coC	Bao lồi của C;
coneC	Nón sinh bởi tập C;
aff(C)	Bao affine của tập C;
riC	Tập hợp các điểm trong tương đối của C;
V(C)	Tập các điểm cực biên (đỉnh) của C;
$\overline{co}C$	Bao lồi đóng của C;
reC	Nón lùi xa (nón các hướng vô hạn) của C;
intC	Tập hợp các điểm trong của C;
dimC	Thứ nguyên (số chiều) của tập C;
$\partial f(x)$	Dưới vi phân của f tại x;
$\nabla f(x)$	Đạo hàm của f tại x;
$N_C(x^*)$	Hình nón pháp tuyến của C tại x^*;
$N_C(x)$	Nón pháp tuyến ngoài của C tại x;
$-N_C(x)$	Nón pháp tuyến trong của C tại x;
$F_C(x)$	Nón các hướng chấp nhận được;
$T_C(x)$	Nón tiếp xúc của C tại x;
$d_C(y)$	Là khoảng cách từ y đến C;
$C(x^*)$	Tập hợp các hướng chấp nhận được của C tại x^*

DANH MỤC CÁC HÌNH

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn luận văn

Tối ưu hóa là một ngành toán học ứng dụng, nghiên cứu lý thuyết và các thuật toán giải bài toán cực trị. Ngành toán học này đã và đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu, tìm hiểu và ứng dụng. Các bài toán tối ưu rất phong phú và đa dạng, chúng có nhiều ứng dụng rộng rãi trong thực tiễn.

Trong tối ưu hóa thì các Định lý tách đóng một vai trò hết sức quan trọng, nhờ Định lý tách mà ta có thể chứng minh được định lý Karush-Kuhn-Tucker, định lý Kuhn-Tucker đây là hai định lý quan trọng dùng để giải quyết các bài toán trong tối ưu. Ngoài ra các Định lý tách còn có nhiều ứng dụng khác trong Giải tích toán học. Chính vì thế mà tôi chọn đề tài " Một vài ứng dụng của định lý tách trong tối ưu hóa"

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn này là trình bày một vài ứng dụng của Định lý tách trong tối ưu hóa.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ sau đây:

Tổng hợp lại một số kiến thức cơ bản của Giải tích lồi, một số tính chất của tập lồi, hàm lồi và các phép toán liên quan.

Trình bày các Định lý tách và các ứng dụng của các Định lý này trong tối ưu hóa.

4. Bố cục của luận văn

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1: Tổng hợp các kiến thức về tập lồi, hàm lồi, các tính chất của chúng, phát biểu và chứng minh Định lý tách.

Chương 2: Trình bày một vài ứng dụng của Định lý tách trong tối ưu hóa, đó là sử dụng Định lý tách để chứng minh Định lý Karush-Kuhn-Tucker, Định lý Kuhn-Tucker, Định lý đối ngẫu Lagrange. Ngoài ra xét đến áp dụng Định lý tách trong kỹ thuật vô hướng hóa của bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Chương 1

ĐỊNH LÝ TÁCH CÁC TẬP LỒI

Định lý tách hai tập lồi là một định lý trung tâm của Giải tích lồi, có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau, đặc biệt là trong tối ưu hóa. Trong chương này chúng ta sẽ trình bầy một số lý thuyết cơ bản của Giải tích lồi, đó là các khái niệm về tập lồi cùng các tính chất của chúng, phát biểu và chứng minh các Định lý tách, Bổ đề Farkas. Các kết quả ở chương này được tổng hợp ở các tài liệu [1], [2], [3].

1.1. Tập lồi

Một *đường thẳng* nối hai điểm (hai véc-tơ) a, b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp tất cả các véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \alpha a + \beta b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1\}.$$

Đoạn thẳng nối hai điểm a và b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các véc-tơ x có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \alpha a + \beta b, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}.$$

Tập lồi là một khái niệm cơ bản nhất của Giải tích lồi, nó được định nghĩa như sau:

1.1.1. Định nghĩa. Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi*, nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

ta nói x là *tổ hợp lồi* của các điểm (véc-tơ) $x^1, x^2, ..., x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \ \forall j = 1, ..., k, \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Tương tự, x là *tổ hợp a-phin* của các điểm (véc-tơ) $x^1, x^2, ..., x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Tập hợp của các tổ hợp a-phin của $x^1, x^2, ..., x^k$ thường được gọi là *bao a-phin* của các điểm này.

Ví dụ

1. Trong $\mathbb{R}^2$ thì các đa giác lồi, hình tròn, hình elíp…là các tập lồi.
2. Trong $\mathbb{R}^3$ thì các đa diện, hình cầu,… là các tập lồi.

1.1.2. Định nghĩa. *Nửa không gian* là một tập hợp có dạng

$$x \middle| a^T x \geq \alpha \ ,$$

trong đó $a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Đây là *nửa không gian đóng*. Tập

$$x \middle| a^T x > \alpha \ ,$$

là *nửa không gian mở*.

Như vậy một siêu phẳng chia không gian ra làm hai nửa không gian, mỗi nửa không gian ở về một phía của siêu phẳng. Nếu hai nửa không gian này là đóng thì phần chung của chúng chính là siêu phẳng đó.

Mệnh đề dưới đây cho thấy tập a-phin chính là ảnh tịnh tiến của một không gian con.

1.1.3. Mệnh đề. *$M \neq \phi$ là tập a-phin khi và chỉ khi nó có dạng $M = L + a$ với L là một không gian con và $a \in M$, không gian con L này được xác định duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử M là tập a-phin và $a \in M$. Khi đó thì $L = M - a$ là một không gian con. Vậy $L = M + a$. Ngược lại, nếu $L = M + a$ với L là không gian con, thì với mọi $x, y \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có