ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN TRỌNG NGHĨA

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ TÍCH CÓ HƯỚNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN TRỌNG NGHĨA

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ TÍCH CÓ HƯỚNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. NGUYỄN VIỆT HẢI

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, giảng viên cao cấp Trường Đại học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều Thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng Đào tạo Sau đại học, các quý Thầy Cô giảng dạy lớp Cao học K7B (khóa 2013-2015) Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Tác giả

Nguyễn Trọng Nghĩa

Mở đầu

Trong toán học hiện đại, tất cả các cấu trúc toán học đều dựa trên cấu trúc không gian vector. Chỉ với hai phép toán cộng hai vector và nhân một số với một vector, không gian ấy đã mô tả được nhiều sự kiện quan trọng của toán học nói riêng và của các ngành khoa học tự nhiên nói chung. Vector là một công cụ mạnh để giải các bài toán hình học phổ thông. Phương pháp vector ngày nay đã trở nên quen thuộc để giải các bài toán hình học cũng như các loại toán khác thay cho cách giải toán truyền thống, nó góp phần làm nên vẻ đẹp mới trong mỗi lời giải bài toán. Tiếp nối luận văn của tác giả Nịnh Thị Thu với đề tài *"Phương pháp vector"*, bảo vệ thành công năm 2015 (xem [7]), tôi tự đặt cho mình bài toán nghiên cứu các ứng dụng của các phép toán tích vô hướng và tích có hướng vào giải các bài toán Hình học, Đại số và một số bài toán của Vật lý. Mục đích của đề tài là:

1. Nêu bật các kỹ thuật thường gặp khi ứng dụng tích vô hướng và tích có hướng để giải các bài toán. Các kỹ thuật này được minh họa qua hàng loạt các ví dụ tường minh.

2. Hệ thống các bài toán có thể giải bằng cách ứng dụng các phép toán trên, đặc biệt nêu rõ ứng dụng của các phép toán vector vào các bài toán phi hình học như: Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình; chứng minh bất đẳng thức, tìm cực trị hình học, cực trị đại số...

3. Trình bày thêm tích giả vô hướng (tích ngoài) của hai vector, diện tích đại số, ví dụ về đại số Lie,... các kiến thức có ích mà chương trình đại học chưa đề cập đến.

Phạm vi của đề tài là ứng dụng các phép toán của không gian vector vào các bài toán trong chương trình phổ thông, đặc biệt chú ý đến các bài toán thi học sinh giỏi các cấp, thi Olympic trong nước và Quốc tế, các bài thi vào Trung học phổ thông chuyên và các đề thi Đại học. Ngoài phần mở đầu và danh mục tài liệu tham khảo nội dung luận văn được chia làm hai chương:

- *Chương 1. Tích vô hướng trong không gian vector Euclid* dành để trình bày những ứng dụng của tích vô hướng giải các bài toán Hình học phẳng, Hình học không gian và các bài toán Đại số.

- *Chương 2. Tích giả vô hướng và tích có hướng*, giới thiệu mới về phép toán " tích giả vô hướng", các ứng dụng của 2 phép toán này trong phạm vi kiến thức của Hình học phổ thông.

Mỗi chương đều có phần giới thiệu chung về lý thuyết cần dùng đến trong chương. Nội dung nào đã có thì nêu tài liệu trích dẫn, nội dung nào mới thì được tác giả chứng minh chi tiết và chặt chẽ. Ý tưởng đó được tác giả lưu ý trong suốt luận văn.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 11 năm 2015
Tác giả

Nguyễn Trọng Nghĩa

Danh sách hình vẽ

Hình vẽ Trang

Chương 1

Tích vô hướng trong không gian vector Euclid

Trong không gian vector ta có các khái niệm cơ bản như độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, tập sinh, cơ sở, tọa độ, không gian con k-chiều (đường thẳng, mặt phẳng,...). Ngoài các phép toán cộng, trừ các vector, nhân một số với một vector ta cần đến phép toán mới để diễn tả các khái niệm mang nội dung hình học nhiều như: Độ dài của vector, góc giữa hai vector, tính trực giao, thể tích khối đa diện... Đó là phép toán nhân vô hướng của hai vector. Phép toán đó cũng cho ta khái niệm *không gian vector Euclid* (có thể xem chi tiết trong [8]).

1.1 Định nghĩa không gian vector Euclid

Định nghĩa 1.1. Một không gian vector $\mathbb{E}$ trên trường số thực $\mathbb{R}$ được gọi là một *không gian vector Euclid thực* nếu có một dạng song tuyến tính đối xứng $\langle \alpha, \beta \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ với mọi vector $\alpha \neq 0.$ Dạng song tuyến tính đối xứng này được gọi là *tích vô hướng* của $\mathbb{E}$.

Nói cách khác, tích vô hướng của hai vector $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ là số thực $\langle \alpha, \beta \rangle$, ký hiệu đơn giản là $\alpha.\beta$, thỏa mãn bốn tiên đề sau

(1) $\alpha.\beta = \beta.\alpha$

(2) $(\alpha_1 + \alpha_2).\beta = \alpha_1.\beta + \alpha_2.\beta$

(3) $k.(\alpha.\beta) = (k.\alpha).\beta$ với mọi $k \in \mathbb{R}$

(4) $\alpha.\alpha = \alpha^2$; và $\alpha.\alpha = 0$ khi và chỉ khi $\alpha = \theta$.

Ta xét một số ví dụ về không gian vector Euclid.

Ví dụ 1.1. Các không gian sau cùng tích vô hướng xác định

(1) Không gian vector tự do trong hình học sơ cấp là một không gian vector Euclid với tích vô hướng $\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\beta} = |\overrightarrow{\alpha}|.|\overrightarrow{\beta}|.\cos(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta})$.

(2) Giả sử $\mathbb{E}$ là không gian vector thực n chiều và $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n$ là một cơ sở của nó. Có thể định nghĩa một tích vô hướng trên $\mathbb{E}$ như sau: Nếu $\overrightarrow{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$ và $\overrightarrow{\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{e_i}$ thì ta đặt $\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\beta} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Nói riêng nếu $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ thì tích vô hướng trên là *tích vô hướng chính tắc* trên $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.2. *Chuẩn* hay *độ dài* của một vector $\overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{E}$ là đại lượng $|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\alpha}}$. Nếu $|\overrightarrow{\alpha}| = 1$ thì $\overrightarrow{\alpha}$ được gọi là một *vector định chuẩn*.

Khái niệm chuẩn là mở rộng khái niệm độ dài thông thường lên không gian nhiều chiều.

Ví dụ 1.2. Với mọi vector $\overrightarrow{\alpha} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có $|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{{a_1}^2 + ... + {a_n}^2}$.

Dễ thấy chuẩn của một vector có những tính chất cơ bản sau

(1) $|\overrightarrow{\alpha}| \geq 0 \, \forall \overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{E}$; $|\overrightarrow{\alpha}| \, \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{0}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{0}$

(2) $|c\overrightarrow{\alpha}| = |c| \, . \, |\overrightarrow{\alpha}| \, \forall c \in \mathbb{R}; \forall \overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{E}$

(3) $\overrightarrow{\beta} = \dfrac{\overrightarrow{\alpha}}{|\overrightarrow{\alpha}|}$ là vector định chuẩn của mọi vector $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$.

Chuẩn của một vector cũng thỏa mãn những bất đẳng thức quen thuộc trong hình học. Hai bất đẳng thức sau được sử dụng rộng rãi trong các ví dụ ứng dụng tích vô hướng là

1. $|\overrightarrow{\alpha} \pm \overrightarrow{\beta}| \leq |\overrightarrow{\alpha}| + |\overrightarrow{\beta}|$ (bất đẳng thức tam giác).
2. $|\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\beta}| \leq |\overrightarrow{\alpha}|.|\overrightarrow{\beta}|$ (bất đẳng thức Schwarz).

Định nghĩa 1.3. Với mọi vector $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$ của $\mathbb{E}$ ta gọi *góc* giữa $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ là góc φ với $0 \leq \varphi \leq \pi$ sao cho

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\beta}}{|\overrightarrow{\alpha}|.|\overrightarrow{\beta}|}.$$

Khái niệm này phù hợp với khái niệm góc thông thường trong hình học. Kết quả sau cũng gọi là *Định lý cosin*: Nếu φ là góc giữa hai vector $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ thì $\left|\overrightarrow{\alpha} \pm \overrightarrow{\beta}\right|^2 = |\overrightarrow{\alpha}|^2 + \left|\overrightarrow{\beta}\right|^2 \pm 2\,|\overrightarrow{\alpha}| \cdot \left|\overrightarrow{\beta}\right| \cdot \cos\varphi$.

Định nghĩa 1.4. Giả sử S_1 và S_2 là hai tập hợp các vector trong $\mathbb{E}$. Ta gọi S_1 *trực giao* với S_2 nếu $\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\beta} = 0$ với mọi vector $\overrightarrow{\alpha} \in S_1, \overrightarrow{\beta} \in S_2$.

Do tính đối xứng của tích vô hướng nên nếu $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$ trực giao với nhau thì $\overrightarrow{\beta}$ và $\overrightarrow{\alpha}$ cũng trực giao với nhau. Ta có định lý mở rộng của Định lý Pitago: *Nếu $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ là hai vector trực giao thì $|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}|^2 = |\overrightarrow{\alpha}|^2 + |\overrightarrow{\beta}|^2$.*