ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN TUÂN

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LYAPUNOV BẰNG PHƯƠNG PHÁP LUÂN PHƯƠNG ẨN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN TUÂN

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LYAPUNOV BẰNG PHƯƠNG PHÁP LUÂN PHƯƠNG ẨN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGUYỄN THANH SƠN

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được bài luận văn với đề tài "Giải phương trình Lyapunov bằng phương pháp luân phương ẩn", bên cạnh sự nỗ lực của bản thân đã vận dụng được những kiến thức thu được trong quá trình học tập, tìm tòi học hỏi cũng như thu thập thông tin số liệu có liên quan đến đề tài, em luôn nhận được sự giúp đỡ, hướng dẫn tận tình của các thầy cô cùng những lời động viên khuyến khích từ phía gia đình, bạn bè, đồng nghiệp.

Em xin gửi lời cảm ơn đến toàn thể các thầy, cô giáo đã tham gia giảng dạy của khóa học của khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên. Em xin chân thành cảm ơn thầy TS. Nguyễn Thanh Sơn, người đã hướng dẫn em làm bài luận văn này, thầy đã tạo mọi điều kiện thuận lợi và là nguồn động lực quan trọng để em hoàn thành bài luận văn này.

Em cũng xin gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu, Ban chuyên môn cùng các đồng nghiệp trường THPT Nam Khoái Châu đã tạo điều kiện tốt nhất cho em trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Luận văn này được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên,tháng 11 năm 2015

Nguyễn Văn Tuân

Học viên Cao học Toán K7Y,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Phương trình Lyapunov, đặc biệt là với vế phải hạng thấp, xuất hiện trong phân tích và giảm bậc của những hệ điều kiển tuyến tính không phụ thuộc thời gian và có số chiều lớn. Trong những trường hợp đó cỡ của hạng điều khiển lớn hơn rất nhiều so với số đầu vào và đầu ra.

Một hệ điều khiển tuyến tính không phụ thuộc thời gian có dạng

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right) \qquad (1)$$

$$y\left(t\right) = Cx\left(t\right) \qquad (2)$$

Hàm vector $x\left(t\right): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ cho ta biết trạng thái của hệ tại thời điểm t. Đầu vào $u\left(t\right): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{r_b}$ và đầu ra $y\left(t\right): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{r_c}$ có r_b tương ứng r_c thành phần. Ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r_b}$, và $C \in \mathbb{R}^{r_c\times n}$ tương ứng là các ma trận hệ thống, ma trận hệ số đầu vào, ma trận hệ số đầu ra.

Nếu A là ổn định tức là mọi giá trị riêng của A đều nằm nửa mặt phẳng trái mở thì gramian điều khiển được $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và gramian quan sát được $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ứng với hệ trên là duy nhất, đối xứng và nửa xác định dương. Chúng lần lượt là nghiệm của phương trình Lyapunov (1) - (2)

$$AP + PA^T = -BB^T, \qquad (3)$$

$$A^TQ + QA = -C^TC. \qquad (4)$$

Nếu số các đầu vào r_b nhỏ hơn nhiều so với số trạng thái n, khi đó rank $\left(BB^T\right) =$ rank $\left(B\right) \leq r_b \ll n$. Và vì thế vế phải của (3) có hạng thấp. Tương tự như thế vế phải của (4) cũng có hạng thấp.

Tính quan trọng về mặt vật lý của những vector riêng trội của gramian miền P và Q thể hiện ở chỗ đó chính là những hướng nhạy cảm nhất đối với đầu vào và là hướng mà theo đó đầu ra nhạy cảm nhất. Vì thế, thông tin về các không gian con bất biến trội của $P = Q$ là đủ để có thể giảm bậc của hệ ban đầu (3) - (4) bằng phương pháp chặt cân bằng.

Đã có nhiều phương pháp được đưa ra để giải phương trình Lyapunov (3) - (4). Những phương pháp giải trực tiếp như phương pháp Bartels-Stewart [1] chỉ giải được với phương trình ma trận cỡ nhỏ. Để giải những phương trình Lyapunov cỡ lớn, người ta buộc phải sử dụng những phương pháp lặp. Trong các phương pháp lặp bao gồm phương pháp Smith, phương pháp lũy thừa, phương pháp dựa trên không gian con Krylov, phương pháp luân phương ẩn [2], [3], [4] nổi trội lên là một phương pháp hiệu quả nhất. Đây chính là lí do khiến chúng tôi chọn đề tài **"Giải phương trình Lyapunov bằng phương pháp luân phương ẩn"** làm đề tài luận văn Thạc sĩ.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu trình bày phương pháp luân phương ẩn (ADI: Alternative Direction Implicit) [3], [4] và phương pháp luân phương ẩn với nhân tử Cholesky (CF-ADI: Cholesky Factorization Alternative Direction Implicit) [2] để giải phương trình Lyapunov cỡ lớn. Luận văn chỉ ra được hệ thống các phương pháp giải phương trình Lyapunov cỡ lớn từ trước tới nay và những ưu nhược điểm của các phương pháp đó. Từ đó phương pháp ADI và CF-ADI nổi lên như một cách tối ưu để giải quyết bài toán.

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là nghiên cứu các phương pháp giải phương trình cỡ lớn. Phạm vi nghiên cứu là hai phương pháp nổi bật ADI và CF-ADI để giải phương trình Lyapunov cỡ lớn.

Phương pháp nghiên cứu chính được sử dụng là đọc hiểu những tài liệu, những bài báo lớn có uy tín trên thế giới và được trình bày lại một cách có hệ thống. Mặt khác chúng tôi cũng thực hiện kiểm tra một số phương pháp thông qua việc lập trình trên MATLAB.

Ý nghĩa khoa học lớn nhất của đề tài là thực hiện một cứu liên tục, liền mạch các phương pháp giải phương trình Lyapunov cỡ lớn từ đơn giản đến phức tạp và trình bày lại một cách có hệ thống, dễ hiểu. Sau khi bảo vệ luận văn xong thì đây sẽ là một tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên ngành toán và học viên cao học chuyên ngành Toán ứng dụng.

Để đạt được những mục tiêu trên, luận văn được trình bày như sau: Chương 1 được dùng để trình bày những kiến thức chuẩn bị quan trọng như phân tích Cholesky và kiểu Cholesky, phân tích Schur, độ phức tạp tính toán, phương pháp đưa về hệ phương trình tuyến tính và phương pháp Bartels - Stewart. Chương 2 trình bày chi tiết hai phương pháp ADI và CF-ADI, làm nổi bật những ưu điểm của việc sử dụng hai phương pháp này để giải phương trình Lyapunov cỡ lớn. Chương 3 chúng tôi trình bày một số ví dụ để minh họa, kiểm chứng cho thuật toán.

Tuy đã rất cố gắng nhưng vì điều kiện thời gian nghiên cứu hạn hẹp nên bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu xót. Rất mong được sự góp ý quý báu của các thầy (cô) giáo, các bạn đồng nghiệp.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 11 năm 2015

Nguyễn Văn Tuân

Học viên Cao học Toán lớp Y, khóa 02/2014-02/2016

Chuyên ngành Toán ứng dụng

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Email: `tuannguyen.ntn@gmail.com`

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Một số phân tích cơ bản

1.1.1 Một số khái niệm

Định nghĩa 1.1. Ma trận A được gọi là ma trận đối xứng nếu $A = A^T$ trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A.

Định nghĩa 1.2. Mọi phần tử của A bên dưới đường chéo chính bằng 0, thì A được gọi là ma trận tam giác trên. Tương tự, nếu mọi phần tử của A ở bên trên đường chéo chính bằng 0, thì A được gọi là ma trận tam giác dưới. Nếu mọi phần tử nằm bên ngoài đường chéo chính bằng 0, thì A được gọi là ma trận chéo.

Định nghĩa 1.3. Ma trận vuông A được gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại một ma trận B sao cho $AB = BA = I_n$, với I_n là ma trận đơn vị.
Nếu B tồn tại, thì nó là duy nhất và được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A, kí hiệu là A^{-1}.

Định nghĩa 1.4. Ma trận vuông A là *ma trận trực giao* nếu và chỉ nếu ma trận chuyển vị của nó bằng ma trận nghịch đảo của nó $A^T = A^{-1}$, mà $A^T A = AA^T = I$, với I là ma trận đơn vị.

Định nghĩa 1.5. Ma trận xác định dương (âm) là ma trận thỏa mãn $x^T Ax > 0$ $(x^T Ax < 0)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ và khác 0. Và $x^T Ax = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Ma trận A được gọi là nửa xác định dương (âm) nếu $x^T Ax \geq 0$ $\left(x^T Ax \leq 0\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Thông thường người ta hay xét tính chất đối xứng cùng với tính chất xác định hoặc nửa xác định.

1.1.2 Một số phân tích cơ bản trong đại số tuyến tính số

Định lí 1.1. *(Phân tích Schur)*
Cho A là một ma trận vuông phức cấp n . Khi đó tồn tại ma trận Unita $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sao cho $T = U^*AU$ là ma trận tam giác trên. Các đường chéo của T là những giá trị riêng của A .

Cho $U^*AU = T$ là một phân tích Schur của A với $U = [u_1, u_2, ..., u_n]$. Các phần tử Schur có thể được viết là $AU = UT$. Cột thứ k của phương trình này là

$$Au_k = \lambda u_k + \sum_{i=1}^{k-1} t_{ik}u_i,\ \lambda_k = t_{kk}, \tag{1.1}$$

nghĩa là

$$Au_k \in span\left\{u_1, ..., u_k\right\},\ \forall k \tag{1.2}$$

Như vậy, k vector Schur đầu tiên $u_1, ..., u_k$ tạo thành một không gian con bất biến đối với A (một không gian con $V \in F^n$ được gọi là bất biến đối với A nếu $AV \subset V$). Từ (1.1) ta có các vector Schur đầu tiên là một vector riêng của A.

Định lí 1.2. *(Phân tích Schur thực)*
Nếu $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ thì có một ma trận trực giao $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_{n\times n} \end{bmatrix}$$

là tựa tam giác trên. Các khối chéo R_{ii} là ma trận 1×1 hoặc 2×2 . Một khối 1×1 tương ứng với một giá trị riêng thực, một khối 2×2 tương ứng với một cặp giá trị riêng phức liên hợp.