

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VIỆT BẮC

PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VIỆT BẮC

PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRẦN NGUYỄN AN

THÁI NGUYÊN - 2015

TÓM TẮT NỘI DUNG

Luận văn "*Phương trình hàm đa thức và ứng dụng*" được chia thành 2 chương, ngoài phần mở đầu, phần kết luận.

Trong Chương 1, luận văn nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị làm cơ sở cho việc trình bày kiến thức ở phần sau của chương như đa thức, nghiệm của đa thức,...Tiếp đến, luận văn trình bày một số phương pháp giải phương trình hàm thường gặp như: Phương pháp đặt ẩn phụ, dồn biến; phương pháp thế giá trị đặc biệt; phương pháp hệ số bất định; phương pháp đổi biến số; phương pháp sử dụng tính chất nghiệm và so sánh bậc...

Trong Chương 2, luận văn tiếp tục trình bày 2 dạng phương trình hàm $P(f)P(g) = P(h)$ và $P(f)P(g) = P(h) + Q$. Ngoài ra, luận văn còn trình bày thêm các phương pháp giải nâng cao như: Phương pháp sử dụng công thức nội suy Lagrange; phương pháp sử dụng số phức; phương pháp sử dụng dãy số... Trong một số dạng phương trình hàm là một số phương pháp giải nhất định chính vì vậy mà tác giả không muốn trình bày tách bạch 2 vấn đề trên. Luận văn tổng hợp được một lượng lớn các ví dụ, với mỗi bài toán lại cho ta những kĩ thuật giải khá riêng biệt.

Lời cảm ơn

Luận văn "*Phương trình hàm đa thức và ứng dụng*" được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Qua đây tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến các thầy cô giáo của khoa sau Đại học, Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã trang bị kiến thức cơ bản, tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới TS. Trần Nguyên An, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tác giả có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Tác giả xin cảm ơn tới UBND thành phố Tuyên Quang, phòng Giáo dục và Đào tạo thành phố, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THCS Lê Quý Đôn đã tạo mọi điều kiện giúp đỡ tác giả trong thời gian học tập và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, 2015

Nguyễn Viết Bắc

*Học viên Cao học Toán K7A,
Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên*

Mục lục

Mở đầu	1
Chương 1. Một số dạng và phương pháp giải phương trình hàm đa thức	3
1.1. Kiến thức chuẩn bị	3
1.2. Phương pháp đặt ẩn phụ, dồn biến	6
1.3. Phương pháp thế giá trị đặc biệt	8
1.4. Phương pháp hệ số bất định	10
1.5. Phương pháp sử dụng tính chất của đa thức $P(x) = P(x+a)$	11
1.6. Phương pháp sử dụng phép biến đổi đối số	12
1.7. Phân tử đại số và đa thức tối thiểu	17
1.8. Phương pháp sử dụng tính chất nghiệm và so sánh bậc	21
1.9. Một số phương pháp khác	37
Chương 2. Một số dạng và phương pháp giải phương trình hàm nâng cao	40
2.1. Phương pháp nội suy Lagrange	40
2.2. Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h)$	44
2.3. Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h) + Q$	49
2.4. Phương pháp sử dụng số phức	50
2.5. Phương pháp sử dụng dãy số	56
2.6. Phương trình hàm có lời giải là hàm đa thức	61
Kết luận	64
Tài liệu tham khảo	65

Mở đầu

Đa thức là một biểu thức bao gồm các biến và các hệ số với các phép toán: cộng, trừ, nhân và lũy thừa nguyên dương. Đa thức xuất hiện hầu hết trong các lĩnh vực khác nhau của Toán học và Khoa học. Đa thức dùng để định nghĩa hàm đa thức được sử dụng trong hóa học và vật lý, kinh tế và khoa học-xã hội, giải tích số, lý thuyết xấp xỉ. Trong Toán học hiện đại đa thức sử dụng để xây dựng vành đa thức và đa tạp đại số, những khái niệm trung tâm của Đại số và Hình học đại số.

Ở phổ thông đa thức được đưa vào giảng dạy từ Lớp 7. Các bài toán về đa thức thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi toán cấp tỉnh, quốc gia, khu vực, quốc tế và Olympic học sinh, sinh viên. Một trong những dạng toán khó khá phổ biến về đa thức là phương trình hàm trên tập các đa thức. Dạng toán phương trình hàm nói chung và phương trình hàm trên tập các đa thức nói riêng là khá phong phú và đa dạng, với nhiều bài toán có lời giải "không mẫu mực". Mục đích của luận văn là phân loại một cách tương đối một số phương pháp cũng như một số dạng phương trình hàm trên tập các đa thức mà ta gọi là phương trình hàm đa thức. Để giải những phương trình hàm dạng này bên cạnh việc sử dụng các kỹ thuật chung cho việc giải phương trình hàm ta còn sử dụng các tính chất và các đặc trưng cơ bản của đa thức như nghiệm, hệ số, bậc, tính liên tục, tính hữu hạn nghiệm, tính khả vi, ...

Luận văn "*Phương trình hàm đa thức và ứng dụng*" được chia thành 2 chương, ngoài phần mở đầu, phần kết luận.

Trong Chương 1, luận văn nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị làm cơ sở cho việc trình bày kiến thức ở phần sau của chương như đa thức, nghiệm của đa thức,...Tiếp đến, luận văn trình bày một số phương pháp giải phương trình hàm thường gặp như: Phương pháp đặt ẩn phụ, dồn

biến; phương pháp thế giá trị đặc biệt; phương pháp hệ số bất định; phương pháp đổi biến số; phương pháp sử dụng tính chất nghiệm và so sánh bậc...

Trong Chương 2, luận văn tiếp tục trình bày 2 dạng phương trình hàm $P(f)P(g) = P(h)$ và $P(f)P(g) = P(h) + Q$. Ngoài ra, luận văn còn trình bày thêm các phương pháp giải nâng cao như: Phương pháp sử dụng công thức nội suy Lagrange; phương pháp sử dụng số phức; phương pháp sử dụng dãy số... Trong một số dạng phương trình hàm là một số phương pháp giải nhất định chính vì vậy mà tác giả không muốn trình bày tách bạch 2 vấn đề trên. Luận văn tổng hợp được một lượng lớn các ví dụ, với mỗi bài toán lại cho ta những kĩ thuật giải khá riêng biệt.

Dù đã nghiêm túc nghiên cứu và rất cố gắng thực hiện luận văn, nhưng với trình độ hạn chế cùng nhiều lý do khác, luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong sự góp ý của các Thầy, Cô, các anh chị đồng nghiệp và các bạn để luận văn này hoàn chỉnh và nhiều ý nghĩa hơn.

Chương 1

Một số dạng và phương pháp giải phương trình hàm đa thức

1.1. Kiến thức chuẩn bị

Trong mục này ta nhắc lại định nghĩa và một số tính chất cơ bản về đa thức với hệ số trên một trường K .

Định nghĩa 1.1.1. Một đa thức một biến với hệ số trên K có thể được viết dưới dạng $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, trong đó $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$, và x là một kí hiệu gọi là biến. Ta cũng viết đa thức này dưới dạng $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ hoặc $P(x) = \sum a_i x^i$, trong đó $a_i = 0$ với mọi $i > n$. Hai đa thức $\sum a_i x^i$ và $\sum b_i x^i$ bằng nhau nếu $a_i = b_i$ với mọi i .

Kí hiệu $K[x]$ là tập các đa thức một biến x với hệ số trên K . Cho $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$. Ta gọi a_0 là *hệ số tự do* của $P(x)$. Nếu $a_n \neq 0$ thì n gọi là *bậc* của đa thức $P(x)$ và được kí hiệu $\deg P = n$. Trong trường hợp này a_n được gọi là *hệ số cao nhất* của $P(x)$. Nếu $n = 1$ thì $P(x)$ gọi là đa thức dạng chuẩn (*monic polynomial*). Ta không định nghĩa bậc cho đa thức 0. Nếu $P(x) = a \in K$ thì $P(x)$ được gọi là *đa thức hằng*. Các đa thức bậc 1 được gọi là *đa thức tuyến tính*.

Định nghĩa 1.1.2. Với hai đa thức $P(x) = \sum a_i x^i$ và $Q(x) = \sum b_i x^i$ trong $K[x]$, định nghĩa:

$$P(x) + Q(x) = \sum (a_i + b_i) x^i,$$

$$P(x)Q(x) = \sum c_k x^k, \text{ trong đó } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ với mọi } k.$$

Khi đó $K[x]$ là vành giao hoán với phép cộng và nhân đa thức. Vành $K[x]$ được gọi là *vành đa thức một biến x với hệ số trong K* . Phần tử không của vành là đa thức 0, phần tử đơn vị là đa thức 1.

Ta định nghĩa vành đa thức nhiều biến bằng quy nạp như sau.

Định nghĩa 1.1.3. Đặt

$$K_1 = K[x_1]$$

$$K_2 = K_1[x_2]$$

...

$$K_n = K_{n-1}[x_n]$$

vành $K_n = K_{n-1}[x_n]$, ký hiệu là $K[x_1, \dots, x_n]$ và gọi là *vành đa thức của n biến $x_1, \dots, x_n$ trên K* . Một phần tử của $K[x_1, \dots, x_n]$ gọi là *một đa thức của n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ lấy hệ tử trong vành K* . Các phần tử của $K[x_1, \dots, x_n]$ thường được ký hiệu bởi $P(x_1, x_2, \dots, x_n), Q(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$

Bằng quy nạp ta có mỗi phần tử $P(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$ biểu diễn được dưới dạng

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Lambda} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, a_{i_1, \dots, i_n} \in K,$$

$\Lambda \subseteq \mathbb{N}^n$ là tập hữu hạn. Cho $K[x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức của n biến $x_1, \dots, x_n$ trên K . Mỗi phần tử có dạng $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ được gọi là *một đơn thức bậc $i_1 + \dots + i_n$ của $K[x_1, \dots, x_n]$* . Các số i_j được gọi là *bậc theo biến x_j của đơn thức $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$* . Mỗi phần tử có dạng au trong đó $a \in K$ và u là một đơn thức được gọi là *một từ của $K[x_1, \dots, x_n]$* , u được gọi là *đơn thức của từ au và a được gọi là hệ số của nó*. *Bậc của từ au được định nghĩa là bậc của đơn thức u* . Hai từ được gọi là *đồng dạng* nếu các đơn thức của chúng là như nhau. Với mỗi phần tử $P \in K[x_1, \dots, x_n]$, rõ ràng ta có thể viết P thành một tổng của hữu hạn từ không đồng dạng. Một biểu diễn như vậy gọi là *biểu diễn chính tắc của $P(x_1, \dots, x_n)$* .

Tiếp theo ta nhắc lại một số tính chất quan trọng cần sử dụng trong phần sau.

Bổ đề 1.1.4. Cho $P(x), Q(x) \in K[x]$ là các đa thức khác 0.

- (i) Nếu $P(x) + Q(x) \neq 0$ thì $\deg(P(x) + Q(x)) \leq \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\}$.
- (ii) Nếu $P(x)Q(x) \neq 0$ thì $\deg(P(x)Q(x)) \leq \deg P(x) + \deg Q(x)$.

Định lý 1.1.5. Cho hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ với $Q(x) \neq 0$. Tồn tại duy nhất hai đa thức $H(x)$ và $R(x)$ sao cho $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$, $R(x) = 0$ hoặc $\deg R(x) < \deg Q(x)$.

Định nghĩa 1.1.6. Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Với mỗi phần tử $v \in \mathbb{K}$, ta kí hiệu $P(v) = a_n v^n + \dots + a_1 v + a_0 \in K$. Phần tử $v \in \mathbb{K}$ được gọi là *ng nghiệm của $P(x)$* nếu $P(v) = 0$. Trong trường hợp này ta cũng nói v là một *ng nghiệm của đa thức $P(x)$* .

Bổ đề 1.1.7. Cho $P(x)$ là một đa thức. Dư của phép chia $P(x)$ cho $x - a$ là $P(a)$.

Định lý 1.1.8 (Định lý Bezout). Số a là *ng nghiệm của đa thức $P(x)$* nếu và chỉ nếu tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho $P(x) = (x - a)Q(x)$.

Định nghĩa 1.1.9. Cho $P(x)$ là một đa thức và $k > 0$ là một số nguyên. Số a được gọi là một *ng nghiệm bội k của đa thức $P(x)$* nếu $P(x)$ chia hết cho $(x - a)^k$ nhưng không chia hết cho $(x - a)^{k+1}$. Nếu $k = 1$ thì a gọi là *ng nghiệm đơn*. Nếu $k = 2$ thì a gọi là *ng nghiệm kép*.

Bổ đề 1.1.10. Cho $P(x)$ là một đa thức. Số a là *ng nghiệm bội k của $P(x)$* nếu và chỉ nếu $P(x) = (x - a)^k Q(x)$ và $Q(a) \neq 0$.

Định lý 1.1.11. Cho $P(x) \neq 0$ và $a_1, a_2, \dots, a_r$ là các *ng nghiệm phân biệt của $P(x)$* . Giả sử a_i là *ng nghiệm bội k_i của $P(x)$* với $i = 1, 2, \dots, r$. Khi đó ta có $P(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_r)^{k_r} Q(x)$, trong đó $Q(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \dots, r$.

Hệ quả 1.1.12. Cho $P(x)$ là một đa thức khác 0. Khi đó số *ng nghiệm của $P(x)$* , mỗi *ng nghiệm tính với số bội của nó*, không vượt quá bậc của của P .

Chứng minh. Giả sử $a_1, \dots, a_r$ là các *ng nghiệm của $P(x)$* với số bội lần lượt là $k_1, \dots, k_r$. Theo Định lý 1.1.11 ta có

$$P(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_r)^{k_r} Q(x).$$

Ta có $\deg(P(x)) = \deg(Q(x)) + \sum_{i=1}^r k_i \geq \sum_{i=1}^r k_i$. □