ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NHỮ VĂN HUẤN

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU VÀ BÀI TOÁN CỰC TRỊ LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NHỮ VĂN HUẤN

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU VÀ BÀI TOÁN CỰC TRỊ LỒI

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Mở đầu **3**

Bảng ký hiệu 5

1 Bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều 6

1.1. Bất đẳng thức biến phân trong không gian Euclid 6

1.1.1. Định nghĩa và ví dụ 6

1.1.2. Tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân 8

1.1.3. Bất đẳng thức biến phân đối ngẫu 8

1.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bất đẳng thức biến phân 11

1.2.1. Phép chiếu mêtric 11

1.2.2. Định lý tồn tại duy nhất nghiệm 12

2 Bất đẳng thức biến phân và bài toán cực trị lồi 19

2.1. Bất đẳng thức biến phân và bài toán cực trị 19

2.1.1. Bài toán cực trị 19

2.1.2. Mối liên hệ giữa bài toán cực trị và bất đẳng thức biến phân 22

2.2. Bất đẳng thức biến phân với hệ phương trình, bài toán bù và bài toán điểm bất động 24

2.2.1. Hệ phương trình 24

2.2.2. Bài toán bù 25

2.2.3. Bài toán điểm bất động 26

2.2.4. Bài toán cân bằng kinh tế dưới dạng bất đẳng thức biến phân 29

Kết luận **32**

Tài liệu tham khảo **33**

Mở đầu

Bài toán cân bằng cổ điển (hay còn gọi là bài toán cân bằng vô hướng) đóng một vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học lý thuyết cũng như ứng dụng. Từ bài toán này có thể suy ra được các bài toán khác nhau trong lý thuyết tối ưu: bài toán tối ưu, bài toán cân bằng Nash, bài toán bù, bài toán bất đẳng thức biến phân ...

Bài toán bất đẳng thức biến phân được Stampacchia đề xuất và nghiên cứu đầu tiên từ đầu những năm 60 của thế kỉ trước (xem [11]). Những nghiên cứu của Stampacchia về bất đẳng thức biến phân liên quan đến việc giải bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Năm 1979, Smith [10] đưa ra bài toán cân bằng mạng giao thông và năm 1980 Dafermos [2] chỉ ra rằng điểm cân bằng của bài toán này là nghiệm của một bất đẳng thức biến phân. Cho tới nay, đã có nhiều bài toán quan trọng trong thực tế được thiết lập và nghiên cứu dưới dạng bất đẳng thức biến phân. Chẳng hạn, bài toán cân bằng mạng giao thông, bài toán cân bằng thị trường độc quyền, bài toán cân bằng tài chính và bài toán cân bằng di cư (xem [7]). Ngoài ra, bất đẳng thức biến phân còn là một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu và xây dựng các phương pháp giải số cho nhiều lớp bài toán cân bằng trong kỹ thuật, vận tải, lý thuyết trò chơi ... Do vậy việc nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm, cũng như xây dựng các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân đã và đang là một đề tài thời sự thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học.

Luận văn này nhằm trình bày tổng quan về bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều và bài toán cực trị lồi. Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều và nghiên cứu điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán. Chương 2 trình bày mối quan hệ của bất đẳng thức biến phân hữu hạn chiều với bài toán cực trị lồi.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin cảm ơn sâu sắc tới người hướng dẫn luận văn cao học của mình, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, giảng viên trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, người đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và giải quyết những thắc mắc cho tôi trong suốt quá trình tôi làm luận văn. Tôi cũng xin bày tỏ lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô trong hội đồng chấm luận văn thạc sĩ, các thầy cô giảng dạy lớp Cao học toán K7D, gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã tạo những điều kiện thuận lợi nhất để tôi có thể hoàn thiện khóa học cũng như luận văn của mình.

Thái Nguyên, tháng 12 năm 2015.

Học viên

Nhữ Văn Huấn

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền giá trị của toán tử A
C	tập con lồi đóng của $\mathbb{R}^n$
I	ánh xạ đơn vị
P_C	phép chiếu mêtrix $\mathbb{R}^n$ lên tập con lồi đóng C của $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều

Chương này trình bày một cách sơ lược về bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều và một số tính chất về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bất đẳng thức biến phân. Mục 1.1 giới thiệu tổng quan về bất đẳng thức biến phân trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ và một số tính chất của tập nghiệm của bài toán. Trong Mục 1.2 trình bày điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của bất đẳng thức biến phân. Các kiến thức của chương được viết trên cơ sở các tài liệu [1]–[11].

1.1. Bất đẳng thức biến phân trong không gian Euclid

1.1.1. Định nghĩa và ví dụ

Trong mục này ta luôn giả thiết $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclid với tích vô hướng và chuẩn lần lượt được ký hiệu bởi $\langle .,. \rangle$ và $\|.\|$.

Định nghĩa 1.1 Cho C là tập con lồi đóng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : C \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đơn trị. Bài toán bất đẳng thức biến phân hữu hạn chiều với ánh xạ phi tuyến đơn trị F, ký hiệu là $\mathrm{VI}(F, C)$ (*variational inequality*), được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm } x_* \in C \textit{ sao cho } \quad \langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{1.1}$$

Ví dụ 1.1 Cho hàm một biến thực f khả vi trên $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Tìm phần tử $x_0 \in [a,b]$ thỏa mãn

$$f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Ba tình huống sau đây có thể xảy ra:

(i) Nếu $x_0 \in (a,b)$ thì $f'(x_0) = 0$;

(ii) Nếu $x_0 = a$ thì $f'(x_0) \geq 0$;

(iii) Nếu $x_0 = b$ thì $f'(x_0) \leq 0$.

Những phát biểu trên được tổng hợp thành

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b],$$

đây là một bất đẳng thức biến phân.

Ví dụ 1.2 Cho f là một hàm số thực khả vi trên một tập con lồi đóng C của không gian Euclid n chiều $\mathbb{R}^n$. Tìm phần tử $x^* \in C$ thỏa mãn

$$f(x^*) = \min_{x\in C} f(x).$$

Giả sử x_0 là điểm cực tiểu cần tìm và x là phần tử tùy ý thuộc C. Vì C là tập hợp lồi nên

$$(1-t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0) \in C, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Hàm

$$\Phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)), \quad 0 \leq t \leq 1$$

đạt cực tiểu tại $t = 0$. Do đó, từ Ví dụ 1.1

$$\Phi'(0) = f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Như vậy điểm x_0 thỏa mãn bất đẳng thức biến phân

$$x_0 \in C : \quad f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Nếu tập C bị chặn thì điểm x_0 tồn tại duy nhất.

1.1.2. Tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân

Cho $C \neq \emptyset$ là tập lồi đóng trong $\mathbb{R}^n$ và $x_* \in C$. Nón chuẩn tắc tới C tại x_* là tập

$$N_C(x_*) = \Big\{ d \in \mathbb{R}^n : \ \langle d, x - x_* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C \Big\}.$$

Véctơ $d \in N_C(x_*)$ được gọi là véctơ chuẩn tắc tới C tại x_*.

Dễ thấy,

$$\begin{aligned}(1.1) &\Leftrightarrow \langle -F(x_*), x - x_* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C \\ &\Leftrightarrow -F(x_*) \ \text{ là vec tơ chuẩn tắc tới } C \text{ tại } \ x_* \\ &\Leftrightarrow -F(x_*) \in N_C(x_*)\end{aligned}$$

hay

$$0 \in F(x_*) + N_C(x_*).$$

Định nghĩa 1.2 Tập hợp những điểm $x_* \in C$ thỏa mãn (1.1) được gọi là tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân, ký hiệu là S.

Các giả thiết thường đặt lên bài toán VI(F, C) là:

(A1) Tập $C \neq \emptyset$ là tập con lồi và đóng trong $\mathbb{R}^n$;

(A2) Ánh xạ F là ánh xạ liên tục (trên một tập con mở chứa C).

Khi C là tập con lồi đóng của $\mathbb{R}^n$ và F là ánh xạ liên tục thì tập S là tập hợp đóng trong $\mathbb{R}^n$.

1.1.3. Bất đẳng thức biến phân đối ngẫu

Nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.1) có mối liên hệ với bài toán:

$$\textit{Tìm điểm } x_* \in C \textit{ thỏa mãn} \quad \langle F(x), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{1.2}$$

Bài toán (1.2) được gọi là bất đẳng thức biến phân đối ngẫu của VI(F, C), ký hiệu là DVI(F, C) (*dual variational inequality*) với tập nghiệm được ký hiệu là S^*. Để khảo sát mối liên hệ giữa S và S^* ta cần thêm giả thiết về tính đơn điệu cho ánh xạ F.