ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

CÙ THỊ NGỌC MAI

VỀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC KIỂU HADAMARD CHO HÀM *r*-LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

CÙ THỊ NGỌC MAI

VỀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC KIỂU HADAMARD CHO HÀM *r*-LỒI

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn **ii**

Danh sách ký hiệu và một số bất đẳng thức quan trọng **iii**

Mở đầu **2**

1 Các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho hàm r -lồi **4**

1.1 Bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho hàm r -lồi 4

1.2 Một số bất đẳng thức khác 12

1.3 Bất đẳng thức Fejer cho hàm r-lồi hoặc r-lồi suy rộng 19

2 Một số mở rộng của bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho họ hàm r-lồi **26**

2.1 Bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho một họ hàm r-lồi . . . 26

2.2 Bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho lớp hàm (h, r)-lồi . . 33

2.3 Bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho lớp hàm r-lồi hai biến 38

2.4 Bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho lớp hàm $\varphi - r-$lồi . 46

2.5 Bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho lớp hàm r-lồi hình học 51

Kết luận và Đề nghị **58**

Tài liệu tham khảo **59**

Lời cảm ơn

Sau một thời gian nghiên cứu đề tài, luận văn của tôi đến nay đã được hoàn thành.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy giáo PGS.TS. Tạ Duy Phượng đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn tôi trong thời gian làm luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu của các thầy cô giáo trong bộ môn Toán ứng dụng nói riêng và khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên nói chung. Tôi xin cảm ơn sự động viên, giúp đỡ của gia đình, bạn bè đã dành cho tôi trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, 2015 **Cù Thị Ngọc Mai**

Học viên Cao học Toán K7Y,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Danh sách ký hiệu và một số bất đẳng thức quan trọng

Một số kí hiệu sử dụng trong luận văn

$L_r(x, y)$	r-logarit trung bình mở rộng của hai số dương x, y
$F_r(x, y)$	Logarit trung bình luân phiên suy rộng của hai số dương x, y
$E(x, y, r, s)$	Trung bình Stolarsky của hai số dương x, y
$L(x, y)$	Logarit trung bình của hai số dương x, y
$HR(h, r, I)$	Lớp các hàm (h, r)-lồi trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$
f_x	Ánh xạ riêng khi cố định biến x
K^o	Phần trong của tập K

Một số bất đẳng thức quan trọng

Bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ với mọi } a, b \geq 0.$$

Bất đẳng thức Minkowski: Với mọi số thực $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ ta có

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bất đẳng thức Young: Với các số dương a, b, p, q thỏa mãn $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ta có

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Bất đẳng thức Jensen: Nếu f là hàm lồi trên khoảng $K \subset \mathbb{R}$, với mọi $x_1, ..., x_n \in K$ và $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$ ta có

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k).$$

Bất đẳng thức Hölder: Trong không gian các hàm giá trị thực khả tích, với $p, q > 0$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ta có

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: Trong không gian trong tích các hàm giá trị phức khả tích-bình phương, ta có

$$\left| \int f(x)g(x)\, dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 \, dx \cdot \int |g(x)|^2 \, dx.$$

Mở đầu

Lý do chọn đề tài

Giải tích lồi đã và đang đóng một vị trí quan trọng trong toán học. Giải tích lồi liên quan đến hầu hết các ngành của toán học như giải tích, giải tích hàm, giải tích số, hình học, toán kinh tế, tối ưu phi tuyến,...

Một kết quả kinh điển cho hàm lồi là bất đẳng thức Hermite-Hadamard, sau này được mở rộng ra thành bất đẳng thức Fejer. Sau đó nhiều tác giả đã mở rộng các bất đẳng thức Hermite-Hadamrd và Fejer cho các lớp hàm lồi suy rộng khác nhau. Bất đẳng thức Hermite-Hadamard do Hermite phát biểu đầu tiên năm 1883 và Hadamard phát biểu năm 1893 và thường được gọi là bất đẳng thức Hadamard.

Nhiều bài toán thực tế mô tả bởi các hàm không nhất thiết là lồi. Vì vậy, cần phải mở rộng khái niệm hàm lồi và nghiên cứu các tính chất của hàm lồi suy rộng, nhằm áp dụng vào các bài toán tối ưu nảy sinh trong thực tế.

Các nhà toán học B. Martos, M. Avriel đã định nghĩa và nghiên cứu lớp hàm r-lồi, là mở rộng của lớp hàm lồi và có một số tính chất tốt khi áp dụng vào bài toán tối ưu.

Bởi vì bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho hàm lồi có nhiều ứng dụng trong Giải tích và Tối ưu, nên tự nhiên là cần mở rộng bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho hàm r-lồi với hy vọng sẽ có nhiều ứng dụng trong toán học và các bài toán thực tế.

Với mục đích nghiên cứu tổng quan các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard

cho hàm r-lồi, tôi đã chọn đề tài: *"Về các bất đẳng thức kiểu Hadamard cho hàm r-lồi"*.

Có rất nhiều tác giả đã nghiên cứu về lớp hàm r-lồi cũng như bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho hàm r-lồi. Để có cái nhìn tổng quan về bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho hàm r-lồi, trong luận văn tôi trình bày các vấn đề sau:

Chứng minh các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard, kiểu Fejer cho hàm r-lồi hoặc r-lồi suy rộng.

Chứng minh các bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho một họ hàm r-lồi, cho lớp hàm (h, r)-lồi, cho lớp hàm r-lồi hai biến,...

Mục đích của đề tài

Trình bày một cách tổng quan về các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho hàm r-lồi.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho lớp hàm r-lồi và lớp hàm r-lồi suy rộng.

Phương pháp nghiên cứu

Tìm hiểu, tổng kết các kiến thức về hàm lồi, hàm r-lồi và bất đẳng thức Hermite-Hadamard, bất đẳng thức Fejer cho hàm r-lồi.

Ý nghĩa khoa học của đề tài

Các kết quả nghiên cứu cho thấy hàm lồi suy rộng rất đa dạng theo đó bất đẳng thức Hermite-Hadamard cũng được mở rộng theo nhiều cách khác nhau.

Ý nghĩa thực tiễn của đề tài

Các kết quả nghiên cứu có thể được áp dụng để chứng minh, mở rộng một số bất đẳng thức giải quyết các bài toán của toán học và các bài toán thực tế.

Chương 1

Các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho hàm r -lồi

1.1 Bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho hàm r -lồi

Mục này trình bày định nghĩa hàm lồi, định nghĩa hàm r-lồi, chứng minh bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho hàm lồi và chứng minh một số bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho hàm r-lồi một biến theo tài liệu [2], [4], [7], [11], [12].

Định nghĩa 1.1.1. Hàm $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ được gọi là lồi nếu bất đẳng thức sau thỏa mãn với mọi $x, y \in [a, b]$ và $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Ta nói f là hàm lõm nếu $-f$ là hàm lồi.

Định nghĩa 1.1.2. Hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ là r-lồi nếu với mọi $x, y \in [a, b]$ và $t \in [0, 1]$ ta có

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \begin{cases} \left(tf^r(x) + (1 - t)f^r(y)\right)^{\frac{1}{r}}, & \text{nếu } r \neq 0, \\ f^t(x)f^{(1-t)}(y), & \text{nếu } r = 0. \end{cases}$$

Nhận xét

Ta thấy hàm 1-lồi là hàm lồi theo nghĩa thông thường.

Nếu f là hàm r-lồi ($r \neq 0$) thì hàm $\varphi(t) = f^r(t)$ là hàm lồi.

Hàm 0-lồi được gọi là hàm *log-lồi*, tức là $logf(x)$ là hàm lồi thông thường nếu $f(x) > 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Định lí 1.1.1. (Bất đẳng thức Hermite-Hadamard), [2, pp. 55-56] *Nếu* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là hàm lồi thì*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.1}$$

Chứng minh Do tính lồi của f trên $[a, b]$ với mọi $t \in [0, 1]$ ta có

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Tích phân theo t trên $[0, 1]$ ta được

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \leq f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt.$$

Từ $\int_0^1 tdt = \int_0^1 (1-t)dt = \dfrac{1}{2}$ và đổi biến $x = ta + (1-t)b$ ta có

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Như vậy ta đã chứng minh được phần thứ hai của (1.1):

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Do tính lồi của f ta cũng có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)\big] &\geq f\big[\frac{ta + (1-t)b + (1-t)a + tb}{2}\big] \\ &= f\big(\frac{a+b}{2}\big).\end{aligned}$$

Tích phân bất đẳng thức này theo t trên $[0, 1]$ ta được

$$f\big(\frac{a+b}{2}\big) \leq \left[\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt\right]$$