ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NÔNG MẠNH LINH

SỐ STIRLING LOẠI HAI VÀ SỐ BELL CHO CÁC ĐỒ THỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NÔNG MẠNH LINH

SỐ STIRLING LOẠI HAI VÀ SỐ BELL CHO CÁC ĐỒ THỊ

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **60 46 01 13**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2015

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa Học-Đại học Thái Nguyên. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán-Tin, Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo nhà trường đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới PGS. TS. Đàm Văn Nhỉ, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Tôi xin cảm ơn các thầy, cô giáo trong hội đồng chấm luận văn đã đóng góp cho tôi những ý kiến quý giá giúp tôi hoàn thiện luận văn này. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi quá trình học tập của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết tổ hợp là một phần quan trọng của toán học rời rạc nghiên cứu về sự sắp xếp các phần tử trong các tập hữu hạn và sự phân bố của các phần tử vào các tập hữu hạn. Mỗi cách sắp xếp hoặc phân bố như thế được gọi là một cấu hình tổ hợp. Các cấu hình đó là các hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp,... các phần tử của một tập hợp. Toán học tổ hợp liên quan đến cả khía cạnh giải quyết vấn đề lẫn xây dựng cơ sở lý thuyết, Một trong những mảng lâu đời nhất của toán học tổ hợp là lý thuyết đồ thị.

Lý thuyết đồ thị là một ngành toán học hiện đại, gắn kết nhiều ngành khoa học với nhau. Các thuật toán ngắn gọn và thú vị của lý thuyết đồ thị giúp chúng ta giải quyết rất nhiều bài toán phức tạp trong thực tế. Vì tầm quan trọng của nó trong các ứng dụng khác nhau, các nhà toán học đã nỗ lực tìm công thức tính số phân hoạch một tập hợp. Một trong những công thức tính số phân hoạch đầu tiên thuộc về nhà toán học tên tuổi Eric Temple Bell (1883-1960). Số phép phân hoạch một tập hợp n phần tử được gọi là số Bell, được kí hiệu là B_n. Để tính số Bell, ta cần tính số phân hoạch tập hợp X gồm n phần tử vào k tập con (hay k khối) khác rỗng, tức là cần tính số Stirling loại hai. Số Stirling được đặt tên theo nhà toán học James Stirling (1692-1770), đã được đề cập trong cuốn sách *"Methodus differentialis, sive Tractatus de Summatine et Interpolatione Serireun Infinitarum"*. Trong luận văn này chúng ta chủ yếu nghiên cứu về số Bell; số Stirling loại hai và các ứng dụng của chúng vào một số lĩnh vực khác nhau của toán học.

Luận văn bao gồm hai chương, phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương 1 chúng tôi trình bày các khái niệm cơ bản về tập hợp, phép phân hoạch của một tập hợp và giới thiệu sơ lược về số Bell và số Stirling. Đồng thời cũng chỉ ra mối liên hệ giữa số Stirling loại hai và số toàn ánh.

Chương 2: Số Stiling loại hai và số Bell của đồ thị. Trong chương 2 chúng tôi trình bày cách xác định các số Bell và số Stirling loại hai của đồ thị và đưa ra các ví dụ cụ thể. Đồng thời cũng giới thiệu về bài toán tô màu cạnh đồ thị, đa thức màu (chromatic polynomials). Ngoài ra, chúng tôi cũng đề cập đến khai triển hàm ban đầu $f(n)$ như một tổ hợp tuyến tính của hệ số nhị thức với đa thức hệ số $A_j^r(n)$ và đa thức B_n được biểu diễn theo các hệ số nhị thức $A_j^r(n)$.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 01 năm 2016.

Người thực hiện

Nông Mạnh Linh

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Đồ thị và đường đi

1.1.1 Khái niệm đồ thị

Lý thuyết đồ thị là một ngành khoa học được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại. Những ý tưởng cơ bản của nó được đưa ra từ thế kỷ 18 bởi nhà toán học L. Euler, người Thụy sĩ. Ông cũng là người đã sử dụng đồ thị để giải quyết bài toán cầu Königsberg nổi tiếng. Nhờ Lý thuyết đồ thị mà nhiều bài toán phức tạp, diễn giải dài dòng được mô tả hình học một cách trực quan và cô đọng. Các thuật toán ngắn gọn và trực quan của Lý thuyết đồ thị đã giúp chúng ta giải quyết rất nhiều bài toán phức tạp trong thực tế.

Định nghĩa 1.1. *Đồ thị* là một cặp $G = (V, E)$, trong đó

(1) V là tập hợp các phần tử, chúng được gọi là các *đỉnh.*

(2) $E \subseteq V \times V$ là tập hợp các phần tử, chúng được gọi là các *cạnh.*

Về bản chất, đồ thị là một tập hợp các đối tượng được biểu diễn bằng các đỉnh và giữa các đối tượng này có một mối quan hệ nhị nguyên biểu diễn bằng các cạnh. Với hai đỉnh $x, y \in V$, đoạn thẳng hay đoạn cong nối x và y biểu thị cạnh (x, y) của đồ thị. Nếu cặp đỉnh x, y tạo thành một cạnh của đồ thị và hai đỉnh này không sắp thứ tự thì cạnh (x, y) được gọi là *cạnh vô hướng;* còn nếu chúng sắp thứ tự thì cạnh được viết thành $[x, y]$ và được gọi là *cạnh có hướng.* Người ta thường phân đồ thị thành hai lớp.

Định nghĩa 1.2. Đồ thị chỉ chứa các cạnh vô hướng được gọi là *đồ thị vô hướng.* Đồ thị chỉ chứa các cạnh có hướng được gọi là *đồ thị có hướng.*

Hiển nhiên, mỗi đồ thị vô hướng có thể biểu diễn bằng một đồ thị có hướng bằng cách thay mỗi cạnh vô hướng (x, y) bằng hai cạnh có hướng tương ứng $[x, y]$ và $[y, x]$.

Định nghĩa 1.3. Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đồ thị đối xứng* nếu $(x, y) \in E, ([x, y] \in E)$, thì $(y, x) \in E, ([y, x] \in E)$.

Dễ dàng thấy rằng, các đồ thị vô hướng đều là đối xứng.

Định nghĩa 1.4. Đồ thị $G = (V, E)$, trong đó mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bởi không quá một cạnh được gọi là *đơn đồ thị* hay *đồ thị.* Nếu đồ thị có những cặp đỉnh được nối với nhau nhiều hơn một cạnh thì được gọi là *đa đồ thị.* Đồ thị được gọi là *đồ thị hữu hạn* nếu tập các đỉnh hữu hạn.

Trong luận văn này chúng ta giới hạn chỉ xét các đồ thị hữu hạn. Ta ký hiệu n là số đỉnh, m là số cạnh của một đồ thị hữu hạn.

1.1.2 Đường đi và chu trình

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị.

Định nghĩa 1.5. *Đường đi* trên một đồ thị G đã cho là một dãy các đỉnh $< x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_k >$ sao cho, mỗi đỉnh trong dãy (không kể đỉnh đầu tiên) kề với đỉnh trước nó bằng một cạnh nào đó, nghĩa là: Với mọi $i = 2, 3, \dots, k-1, k$ ta đều có cạnh $(x_{i-1}, x_i) \in E$.

Với đường đi $< x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_k >$, ta nói rằng, đường đi này đi từ đỉnh đầu x_1 đến đỉnh cuối x_k. Số cạnh trên đường đi gọi là *độ dài* của đường đi đó. *Đường đi đơn* là đường đi mà các đỉnh của nó khác nhau từng đôi một.

Định nghĩa 1.6. *Chu trình* là một đường đi khép kín, có nghĩa, đỉnh đầu của đường đi trùng với đỉnh cuối của đường đi. Chu trình được gọi là *chu trình đơn* nếu các đỉnh của nó khác nhau từng đôi.

Ta thường ký hiệu chu trình qua $[x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}, .., x_{k-1}, x_k]$, trong đó $x_1 \equiv x_k$. Để thu gọn, trong ký hiệu của chu trình ta thường không viết đỉnh cuối $[x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}, .., x_{k-1}]$.

Trong một đồ thị, *đỉnh nút* là đỉnh kề với chính nó. Hai cạnh có ít nhất một đỉnh chung được gọi là *hai cạnh kề nhau.*

1.1.3 Bậc của đỉnh và tính liên thông của đồ thị

Định nghĩa 1.7. Cho đồ thị $G = (V, E)$. Đồ thị $G' = (V', E')$ được gọi là *đồ thị con* của đồ thị G nếu $\begin{cases} V' \subseteq V \\ E' = E \cap (V \times V'). \end{cases}$

Đồ thị $G'' = (V, E'')$, $E'' \subseteq E$, được gọi là *đồ thị riêng* của đồ thị G.

Như vậy, mỗi tập con các đỉnh V' của đồ thị G tương ứng duy nhất với một đồ thị con của nó. Do vậy, để xác định một đồ thị con ta chỉ cần nêu tập đỉnh của nó. Còn đồ thị riêng là đồ thị giữ nguyên tập đỉnh và bỏ bớt đi một số cạnh.

Định nghĩa 1.8. Hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là *đẳng hình* với nhau nếu có một song ánh $S : V_1 \to V_2, x \mapsto S(x)$, trên tập các đỉnh, bảo toàn quan hệ các cạnh, có nghĩa: Với mọi $x, y \in V_1$, cạnh $(x, y) \in E_1$ khi và chỉ khi $(S(x), (S(y)) \in E_2$.

Người ta thường không phân biệt hai đồ thị đẳng hình với nhau vì về thực chất chúng chỉ khác nhau tên gọi của các đỉnh và cách biểu diễn bằng hình vẽ.

Định nghĩa 1.9. Cho đồ thị $G = (V, E)$. Ta có định nghĩa sau:

(1) Hai đỉnh của đồ thị G được gọi là *liên thông* nếu trên đồ thị có đường đi vô hướng nối chúng với nhau.

(2) Đồ thị G được gọi là *liên thông* nếu mọi cặp đỉnh của đồ thị đều liên thông với nhau.

(3) Đồ thị có hướng G được gọi là *liên thông mạnh* nếu mọi cặp đỉnh đều có đường đi có hướng nối chúng với nhau..

(4) Số cạnh kề với đỉnh $a \in V$ được gọi là *bậc* của đỉnh a trong đồ thị G và được ký hiệu qua $\deg(a)$. Riêng *khuyên* tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Đỉnh bậc 0 được gọi là *đỉnh cô lập;* Đỉnh bậc 1 được gọi là *đỉnh treo.*

Quan hệ liên thông trên tập đỉnh là một quan hệ tương đương. Nó tạo nên một phân hoạch trên tập các đỉnh. Mỗi lớp tương đương của quan hệ này được gọi là một *mảng liên thông* (hay *thành phần liên thông*) của đồ thị.

Định nghĩa 1.10. Đồ thị được gọi là *đầy đủ* nếu hai đỉnh bất kỳ đều có cạnh nối.

Người ta thường ký hiệu đồ thị vô hướng đầy đủ n đỉnh là K_n. Trong đồ thị đầy đủ K_n mỗi đỉnh đều có bậc là $n-1$ và đồ thị là liên thông. Hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bằng một đường đi ngắn nhất có độ dài bằng 1. Đó chính là cạnh nối hai đỉnh ấy.

Định lý 1.1. *Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị* $G = (V, E), n = |V| \geqslant 2$, *vô hướng liên thông luôn có đường đi đơn.*

Chứng minh: Giả sử x, y là hai đỉnh phân biệt của đồ thị vô hướng liên thông G. Ta có ít nhất một đường đi giữa x và y. Gọi $x_0, x_1, \ldots, x_k$ với $x_0 = x, x_k = y$ là dãy các đỉnh của đường đi có độ dài ngắn nhất (bao giờ cũng có). Đây chính là đường đi đơn cần tìm. Thật vậy, giả sử nó không là đường đi đơn. Khi đó $x_i = x_j$ với $0 \leqslant i < j$. Điều này có nghĩa là giữa các đỉnh x và y có đường đi ngắn hơn nữa qua các đỉnh $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_k$ nhận được bằng cách xóa đi các cạnh tương ứng với dãy các đỉnh $x_i, \ldots, x_{j-1}$. □

Định lý 1.2. *Đồ thị* $n \geqslant 2$ *đỉnh không có đỉnh nút có ít nhất hai đỉnh cùng bậc.*

Chứng minh: Xét 3 trường hợp dưới đây:

(i) Trường hợp 1: Đồ thị có đỉnh bậc 0, có nghĩa: Đồ thị có đỉnh cô lập. Khi đó đỉnh của các bậc chỉ có thể là: $0, 1, 2, ..., n-2$. Số các bậc khác nhau nhiều nhất là $n-1$.

(ii) Trường hợp 2: Đồ thị có đỉnh bậc $n-1$. Khi đó đồ thị không có đỉnh cô lập. Vậy, bậc của các đỉnh chỉ có thể là $0, 1, 2, ..., n-1$. Số các bậc khác nhau nhiều nhất cũng là $n-1$.

(iii) Trường hợp 3: Đồ thị không có đỉnh bậc 0 và đỉnh bậc $n-1$. Khi đó, số các bậc khác nhau nhiều nhất cũng là $n-1$.

Trong cả ba trường hợp, số các bậc khác nhau không quá $n-1$. Như vậy ít nhất phải có hai đỉnh chung một bậc theo Nguyên lý Dirichlet. □