ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THÙY NHUNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢM CƠ SỞ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC BỨC TUYẾN TÍNH PHỤ THUỘC THAM SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THÙY NHUNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢM CƠ SỞ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC BỨC TUYẾN TÍNH PHỤ THUỘC THAM SỐ

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**

Mã số: **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS. NGUYỄN THANH SƠN

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Tóm tắt nội dung **iii**

Lời cảm ơn **iv**

Mở đầu **1**

0.1 Lý do chọn đề tài 1

0.2 Mục đích nghiên cứu 4

0.3 Nhiệm vụ nghiên cứu 4

0.4 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu 4

0.5 Phương pháp nghiên cứu 4

1 Kiến thức chuẩn bị **5**

1.1 Không gian tích vô hướng 5

1.2 Dạng tuyến tính và dạng song tuyến tính 6

1.2.1 Dạng tuyến tính 6

1.2.2 Dạng song tuyến tính 7

1.3 Dạng tuyến tính và dạng song tuyến tính phụ thuộc tham số 8

1.3.1 Sự phụ thuộc affine vào tham số 9

1.3.2 Tính bức phụ thuộc tham số 9

2 Phương pháp giảm cơ sở **11**

2.1 Không gian hàm và dạng yếu của phương trình elliptic 11

2.1.1 Dạng yếu phụ thuộc tham số 11

2.1.2 Tích vô hướng và chuẩn khác 12
2.2 Không gian và cơ sở xấp xỉ hữu hạn chiều 13
2.2.1 Rời rạc hóa bài toán 13
2.2.2 Phép chiếu Galerkin 14
2.2.3 Phương trình đại số 15
2.3 Giảm cơ sở 17
2.3.1 Không gian và cơ sở 17
2.3.2 Phép chiếu lên không gian số chiều nhỏ 18
2.3.3 Phương trình đại số 19
2.4 Thủ tục tính toán Online- Offline 20
2.5 Thuật toán Greedy 21
2.6 Ước lượng sai số hậu nghiệm 23
2.6.1 Cận dưới của hằng số liên tục 24
2.6.2 Cận trên của hằng số liên tục 25
2.6.3 Những kiến thức cần thiết khác 27
2.6.4 Ước lượng sai số 28
2.6.5 Cận của sai số tương ứng với chuẩn trên X 30

3 Ví dụ số **32**

Kết luận **34**

Tài liệu tham khảo **35**

TÓM TẮT NỘI DUNG

Luận văn được viết có nội dung về phương pháp giảm cơ sở cho phương trình elliptic phụ thuộc tham số. Chúng tôi trình bày đầy đủ các nguyên liệu để người đọc có thể hiểu một cách chi tiết việc xây dựng phương pháp, cụ thể là phép chiếu Galerkin, thuật toán Greedy và cận dưới của hằng số bức phụ thuộc tham số sử dụng phép cách tiếp cận $\min -\theta$.

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo đã tận tình giảng dạy, bồi dưỡng kiến thức trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và rèn luyện tại trường.

Tác giả xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Thanh Sơn đã tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình viết luận văn.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, 2015 **Phạm Thị Thùy Nhung**

Học viên Cao học Toán K7A,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

0.1 Lý do chọn đề tài

Để bắt đầu, ta hãy xét Bài toán Dirichlet cho phương trình Poisson

$$\begin{aligned} -\Delta y = f, &\text{ trong } \Omega, \\ y = 0, &\text{ trên } \Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^k, k \geq 2$ có biên Γ thỏa mãn điều kiện Lipschitz và $f \in L^2(\Omega)$. Với dữ liệu trên Bài toán (1) không thể có nghiệm cổ điển $y \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mà thay vào đó, người ta xét nghiệm suy rộng của Bài toán (1).

Nhắc lại rằng, $L^2(\Omega)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle f, g \rangle = \int_{L^2(\Omega)} f(x)g(x)dx \text{ và } H_0^1(\Omega) = \{g \in L^2(\Omega) : \exists \frac{\partial g}{\partial x_i} \in L_\Omega^2 \text{ và } g|_\Gamma = 0\}$$

là không gian hàm suy rộng trên Ω. Bài toán (1) được đưa về dạng đẳng thức biến phân như sau: Tìm $y \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \bigtriangledown y \bigtriangledown v dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \ \forall y \in H. \tag{2}$$

Bây giờ ta định nghĩa dạng tuyến tính

$$f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

trong đó, $f(v)$ với $v \in H_0^1(\Omega), f(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$ và dạng song tuyến tính

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

với $a(w,v) = \int_\Omega \bigtriangledown y. \bigtriangledown vdx$. Theo đó Bài toán (2) có thể được viết lại như sau

$$a(y,v) = f(v),\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Lưu ý rằng, $H_0^1(\Omega)$ là không gian con của không gian $H^1(\Omega)$ với tích vô hướng

$$\langle w,v\rangle = \int_\Omega (wv + \bigtriangledown w \bigtriangledown v)dx$$

và chuẩn tương ứng

$$||v||_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (v^2 + \bigtriangledown v^2)dx\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Theo Bất đẳng thức Friedrichs

$$\int_\Omega v^2 d(x) \leq C(\Omega)\int_\Omega \bigtriangledown v^2 dx,$$

với $C(\Omega)$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào Ω, ta suy ra

$$a(v,v) \geq \frac{1}{1+C(\Omega)}||v||^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4}$$

Bất đẳng thức (4) được gọi là tính chất bức. Thêm vào đó, từ Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta suy ra

$$|a(w,v)| \leq ||w||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}, \tag{5}$$

đây được gọi là tính liên tục của a. Trong khi xét Bài toán (1) là ta đã ngầm định rằng phương trình đó là không phụ thuộc tham số. Trong thực tế, khi sử dụng Bài toán (1) như là một mô hình toán học cho hiện tượng truyền nhiệt dừng, người ta có thể muốn giữ lại hằng số dẫn nhiệt như là một tham số. Việc này cho phép sử dụng mô hình cho nhiều chất dẫn nhiệt có hằng số dẫn nhiệt khác nhau. Tương tự như thế, hàm nguồn f cũng có thể phụ thuộc vào tham số. Tổng quát, người ta có thể xét bài toán phụ thuộc tham số

$$a(y,v;\mu) = f(v;\mu),\ \forall v \in V, \mu \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k. \tag{6}$$

Và cuối cùng, trong rất nhiều trường hợp, người ta không quan tâm đến toàn bộ trạng thái y mà chỉ là một phần thông tin của trạng thái được biểu diễn bởi

$$s(\mu) = \ell(y;\mu), \tag{7}$$

trong đó, g cũng là một dạng tuyến tính phụ thuộc tham số.

Bài toán đặt ra ở đây là: với mỗi $\mu \in \mathcal{D}$, tính $s(\mu)$. Đối với những bài toán thực tế cùng yêu cầu cao về tính chính xác, cỡ của bài toán thường rất lớn, hàng nghìn cho đến hàng triệu. Với đặc thù cần phải tính nghiệm, hoặc thông tin liên quan đến nghiệm nhiều lần (many-query context), máy tính sẽ phải mất nhiều thời gian để giải mô hình cỡ lớn với nhiều giá trị khác nhau của tham số. Yêu cầu đặt ra là tìm được một thuật toán để sao cho, việc tính toán nghiệm nhanh nhưng vẫn đảm bảo kiểm soát được sai số. Do vậy, phương pháp giảm cơ sở là đặc biệt cần thiết để xử lý những bài toán dạng này. Với lí do trên, chúng tôi đã chọn "Phương pháp giảm cơ sở giải phương trình elliptic bức tuyến tính phụ thuộc tham số" làm đề tài cho luận văn thạc sĩ. Luận văn gồm 3 chương.

- **Chương 1**: Kiến thức chuẩn bị

  Trong chương này, chúng tôi sẽ nhắc lại những lý thuyết cần thiết cho việc trình bày phương pháp ở chương sau. Chúng bao gồm phép chiếu Galerkin, rời rạc hóa phương trình, tính bị chặn, tính bức, tính phụ thuộc affine ...

- **Chương 2**: Phương pháp giảm cơ sở

  Trong chương này, trước tiên chúng tôi sẽ trình bày sơ lược cách rời rạc hóa bài toán (6) - (7) bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Sau đó, phép chiếu Galerkin được sử dụng để giảm kích cỡ của cơ sở cũng đồng thời giảm kích cỡ của bài toán. Cuối cùng, chúng tôi tập trung trình bày các "nguyên liệu" cũng như kết quả phục vụ cho việc xây dựng, cơ sở giảm đó.

- **Chương 3**: Ví dụ số

  Chương này đưa ra 2 ví dụ minh họa được lập trình trên MATLAP với dữ liệu được lấy từ mô hình thực tế trong khoa học kĩ thuật.

0.2 Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu lý thuyết phương pháp giảm cơ sở và áp dụng nó để giải phương trình elliptic bức tuyến tính phụ thuộc tham số.

0.3 Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung làm rõ một số vấn đề sau đây, trình bày ý tưởng của phương pháp giảm cơ sở giải phương trình elliptic bức tuyến tính phụ thuộc tham số, các khái niệm và tính chất liên quan đến phương pháp, nội dung phương pháp và cuối cùng là áp dụng phương pháp này cho một số ví dụ thực tế.

0.4 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Đối tượng nghiên cứu: Phương pháp giảm cơ sở
- Phạm vi nghiên cứu: Bài toán elliptic bức tuyến tính phụ thuộc affine vào tham số.

0.5 Phương pháp nghiên cứu

- Đọc và nghiên cứu một số tài liệu liên quan như sách, báo, tạp chí, luận văn thạc sĩ, tiến sĩ.
- Sử dụng nhiều kiến thức của đại số tuyến tính ứng dụng, giải tích hàm.
- Kiểm chứng các kết quả lý thuyết bằng ví dụ số lập trình trên MATLAP.