ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**PHẠM TIẾN ĐỘ**

# THUẬT TOÁN PHÂN RÃ GIẢI BÀI TOÁN PHÂN BỐ SẢN XUẤT VỚI CHI PHÍ LÕM

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Thái Nguyên - 12/2015**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**PHẠM TIẾN ĐỘ**

# THUẬT TOÁN PHÂN RÃ GIẢI BÀI TOÁN PHÂN BỐ SẢN XUẤT VỚI CHI PHÍ LÕM

**Chuyên ngành: Toán ứng dụng**
**Mã số: 60 46 01 12**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

**GS.TS. Trần Vũ Thiệu**

**Thái Nguyên - 12/2015**

# Mục lục

# MỞ ĐẦU

Bài toán cực tiểu hàm lõm trên một tập lồi đóng gọi là *bài toán qui hoạch lõm* (Concave Programming Problem). Đây là một bài toán cơ bản của tối ưu toàn cục, vì tính phổ biến của nó và vì nhiều bài toán tối ưu toàn cục quy về nó hoặc dựa ít nhiều trên phép giải của nó. Đơn giản hơn cả và được nghiên cứu nhiều là bài toán qui hoạch lõm với ràng buộc tuyến tính, hiện còn ít đề tài cao học đề cập tới.

Sách tham khảo [2], [5] nêu nhiều kết quả lý thuyết và phương pháp giải lớp bài toán này. Các tài liệu tham khảo [3], [4] chủ yếu đề cập tới bài toán qui hoạch lõm với các ràng buộc tuyến tính và mô hình bài toán phân bố sản xuất thường gặp.

Sau khi được học các chuyên đề về giải tích lồi, tối ưu hóa và các kiến thức có liên quan, với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về những kiến thức đã học và các ứng dụng của những kiến thức này, tôi chọn đề tài luận văn:

"Thuật toán phân rã giải bài toán phân bố sản xuất với chi phí lõm".

Mục đích chính của luận văn là tìm hiểu về bài toán qui hoạch lõm, chủ yếu là bài toán với ràng buộc tuyến tính và thuật toán xấp xỉ ngoài giải bài toán. Đặc biệt chú ý tới thuật toán phân rã giải mô hình bài toán phân bố sản xuất với chi phí lõm. Luận văn được viết dựa trên các tài liệu tham khảo [1]- [5].

Các kết quả cần đạt được: hiểu và trình bày được một số nội dung chính sau:

**a)** Hàm lõm và bài toán cực tiểu hàm lõm trên tập lồi đa diện.

**b** Thuật toán xấp xỉ ngoài giải bài toán qui hoạch lõm ràng buộc tuyến tính.

**c)** Bài toán phân bố sản xuất với chi phí lõm và thuật toán phân rã giải bài toán, dựa trên kỹ thuật xấp xỉ ngoài.

Cấu trúc luận văn gồm 3 chương.

- Chương 1 "Kiến thức chuẩn bị" nhắc lại kiến thức cơ sở về tập lồi, tập lồi đa diện, cách xác định tập đỉnh của một đa diện lồi và về hàm lồi, hàm lõm và hàm tựa lõm cùng một số tính chất của các hàm này.

- Chương 2 "Bài toán qui hoạch lõm ràng buộc tuyến tính" trình bày tính chất cực trị cơ bản của hàm lồi, hàm lõm. Đáng chú ý là cực tiểu địa phương của hàm lõm nói chung không là cực tiểu toàn cục và cực tiểu của hãm lõm nếu có sẽ đạt được tại điểm cực biên (nói riêng, tại đỉnh) của tập ràng buộc. Giới thiệu bài toán qui hoạch lõm: tìm cực tiểu của hàm lõm (hay tựa lõm) trên tập lồi đóng. Trình bày phương pháp xấp xỉ ngoài giải qui hoạch lõm nói chung và qui hoạch lõm với ràng buộc tuyến tính nói riêng. Cuối chương nêu ví dụ số minh họa thuật toán giải.

- Chương 3 "Bài toán phân bố sản xuất với chi phí lõm" trình bày phương pháp nêu ở [4] giải một số bài toán qui hoạch tuyến lõm cấu trúc riêng có tên là *bài toán phân bố sản xuất với chi phí lõm*. Phương pháp này dựa trên ý tưởng phân rã (chia nhỏ) bài toán ban đầu thành một số bài toán qui hoạch lõm với ít biến số hơn và các bài toán vận tải tương ứng. Bài toán qui hoạch lõm sẽ giải theo thuật toán xấp xỉ ngoài, còn bài toán vận tải giải theo thuật toán thế vị của qui hoạch tuyến tính. Cuối chương xét ví dụ số minh họa thuật toán.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn này còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quí thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn sau này.

Nhân dịp này, tác giả luận văn xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TS.Trần Vũ Thiệu, đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

# Chương 1

# KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này nhắc lại kiến thức liên quan đến tập lồi, tập lồi đa diện, hàm lồi, hàm lõm, hàm tựa lõm và các tính chất của chúng. Trong chương còn trình bày cách tính các đỉnh của một đa diện lồi, nhận được bằng cách thêm ràng buộc vào đa diện lồi khác mà ta đã biết tập đỉnh của nó. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [3] và [5].

## 1.1 TẬP LỒI VÀ TẬP LỒI ĐA DIỆN

Trước hết ta nhắc lại khái niệm tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ và các khái niệm có liên quan.

**Định nghĩa 1.1.** Tập $C \subseteq R$ được gọi là một *tập lồi* nếu $\lambda a + (1-\lambda)b \in C, \forall a, b \in C, \forall \lambda \in [0,1]$.

- Ta để ý tới các tập lồi đặc biệt sau đây:

  **a)** Tập afin là tập chứa trọn đường thẳng đi qua hai điểm bất kì thuộc nó.

  **b)** Siêu phẳng là tập có dạng $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha\}, a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

  **c)** Các nửa không gian đóng

  $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geqslant \alpha\}$, $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leqslant \alpha\}$.

  **d)** Các nửa không gian mở

  $K^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x > \alpha\}$, $K^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x < \alpha\}$.

- Từ định nghĩa tập lồi trực tiếp suy ra một số tính chất đơn giản sau đây:

  **a)** Giao của một họ bất kì các tập lồi là một tập lồi. C, D lồi $\Rightarrow C \bigcap$D lồi.

  **b)** Nếu $C, D \subset \mathbb{R}^n$ thì $C \pm D = \{x \pm y =: x \in C, y \in D\}$ là các tập lồi.

  **c)** Nếu $C \subset \mathbb{R}^m$ và $D \subset \mathbb{R}^n$ thì tích $C \times D = \{(x, y) : x \in C, y \in D\}$ là một tập lồi trong $\mathbb{R}^{m+n}$ (Có thể mở rộng cho nhiều tập lồi).

**Định nghĩa 1.2.** Cho E là một tập hợp bất kì trong $\mathbb{R}^n$

**a)** Giao của tất cả các tập afin chứa E gọi là *bao afin* của E, kí hiệu là *aff E*.

**b)** Giao của tất cả các tập lồi chứa E gọi là *bao lồi* của E, kí hiệu là *conv E*.

**Định nghĩa 1.3. a)** *Thứ nguyên* (hay *số chiều*) của một tập afin M, kí hiệu *dim M*, là thứ nguyên (số chiều) của không gian con song song với nó.

**b)** *Thứ nguyên* (hay *số chiều*) của một tập lồi C, kí hiệu *dim C*, là thứ nguyên (số chiều) của bao afin aff C của nó.

**Định nghĩa 1.4.** Tập lồi $K \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *nón lồi* nếu nó có thêm tính chất $\lambda x \in K, \forall x \in K, \forall \lambda > 0$.

**Định lí 1.1.** *Hai tập lồi $\varnothing \neq C, D \subset \mathbb{R}^n$ không có điểm chung ($C \cap D = \varnothing$ ) có thể tách được bằng một siêu phẳng, nghĩa là có vectơ $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ và số $\alpha$ sao cho*

$$a^T x \leqslant \alpha \leqslant a^T y, \forall x \in C, \forall y \in D.$$

**Định nghĩa 1.5.** Một tập con lồi F của tập lồi C được gọi là một *diện* của C nếu $x, y \in C$ mà $(1 - \lambda)x + \lambda y \in F, 0 < \lambda < 1$ thì $[x, y] \subset F$, nghĩa là nếu một đoạn thẳng bất kỳ thuộc C có một điểm trong thuộc F thì cả đoạn thẳng ấy phải nằm trọn trong F.

Một diện có số chiều 0 gọi là một *điểm cực biên* của C. Nói một cách khác, đó là một điểm thuộc C mà nó không thể là một điểm trong của một đoạn thẳng bất kỳ nào với hai đầu mút khác nhau thuộc C.

Một diện có số chiều 1 gọi là một *cạnh* của C: cạnh là *hữu hạn* nếu diện đó là một đoạn thẳng, cạnh là v*ô hạn* nếu diện đó là một nửa hay cả đường thẳng.

Tất nhiên tập $\varnothing$ và bản thân C cũng là một diện của C. Một diện khác của C, khác $\varnothing$ và khác C, gọi là một *diện thực sự* của C. Ví dụ: các diện thực sự của một khối lập phương trong $\mathbb{R}^3$ là 8 đỉnh, 12 cạnh (hữu hạn) và 6 mặt của nó.

**Định nghĩa 1.6.** Một tập lồi mà là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng gọi là một *tập lồi đa diện*. Nói cách khác, đó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các phương trình và bất phương trình tuyến tính.

Một tập lồi đa diện có thể không giới nội. Một tập lồi đa diện giới nội còn được gọi là một *đa diện lồi*. Các đa giác lồi theo nghĩa thông thường trong $\mathbb{R}^2$ (tam giác, hình thang, hình vuông, hình chữ nhật,...) là những ví dụ cụ thể về đa diện lồi.

Mỗi điểm cực biên của tập lồi đa diện được gọi là một *đỉnh* của tập đa diện đó. Đối với đa diện lồi (tức tập lồi đa diện bị chặn) ta có định lý biểu diễn sau:

**Định lí 1.2.** *Cho D là một đa diện lồi khác rỗng và V là tập đỉnh của D. Khi đó, mỗi $x \in D$ có biểu diễn:*

$$x = \sum_{v \in V} \lambda_v v \text{ với } \lambda_v \geqslant 0 \text{ và } \sum_{v \in V} \lambda_v = 1.$$

## 1.2 XÁC ĐỊNH CÁC ĐỈNH CỦA ĐA DIỆN LỒI

Mục này đề cập tới bài toán sau đây thường gặp khi thực thi các thuật toán xấp xỉ ngoài giải qui hoạch lõm.

Bài toán A. Cho tập lồi đa diện bị chặn $M \subset \mathbb{R}^n$ xác định bởi hệ ràng buộc tuyến tính có dạng:

$$h_i(x) = A_i x + b_i \leqslant 0, i = 1, ..., m,$$

trong đó $A_i$ là vectơ hàng n - chiều, $b_i$ là một con số, $m \geqslant n$. Giả sử ta đã biết U - tập đỉnh của M, nghĩa là ta có biểu diễn M = conv U (Định lý 1.2).

Ta giả thiết $U \neq \varnothing$ (Đa diện lồi M có đỉnh). Cho hàm afin

$$h_0(x) = A_0x + b_0$$

với $A_0$ là vectơ hàng n - chiều khác 0, $b_0$ là một số thực.

Đặt:

$$N = M \cap \{x \in \mathbb{R}^n : h_0(x) \leqslant 0\}. \tag{1.1}$$

Rõ ràng N cũng là một đa diện lồi. Bài toán đặt ra là: Hãy xác định tập đỉnh V của N ? (Bài toán tương tự cũng được đặt ra và giải quyết trọn vẹn cho trường hợp tập lồi đa diện không bị chặn. Tuy nhiên ta không đề cập tới ở đây).

Để giải quyết vấn đề đặt ra, ta ký hiệu:

$$U^- = \{u \in U : h_0(u) < 0\} \tag{1.2}$$

$$U^+ = \{u \in U : h_0(u) > 0\} \tag{1.3}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}.$$

Các mệnh đề sau đây tạo cơ sở lý luận cho việc giải quyết bài toán đặt ra.

**Mệnh đề 1.1.** *Nếu $U^+ = \varnothing$ thì N = M, nghĩa là V = U.*

Chứng minh. Theo giả thiết $U^+ = \varnothing$ nên $h_0(u) \leqslant 0$ với mọi $u \in U$. Với mỗi $x \in M$ ta có biểu diễn:

$$x = \sum_{u \in U} \lambda_u u, \lambda_u \leqslant 0, \sum_{u \in U} \lambda_u = 1.$$

Suy ra

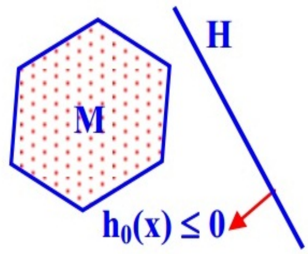
$$h_0(x) = \sum_{u \in U} \lambda_u h_0(u) \leqslant 0.$$

nghĩa là $x \in N$. Do đó $M \subseteq N$. Bất đẳng thức ngược lại là hiển nhiên. Vậy M = N và do đó V = U.

**Mệnh đề 1.2.** *Giả sử $U^- = \varnothing$. Khi đó:*

**a)** *Nếu $U^+ = U$ thì $N = \varnothing$, nghĩa là $V = \varnothing$.*

**b)** *Nếu $U^+ \neq U$ thì $V = U \backslash U^+$.*




Hình 1.1: Mệnh đề 1.1: $U^+ = \varnothing$

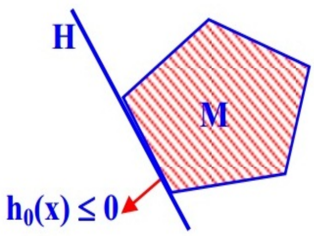
Chứng minh. a) $U = U^+$ có nghĩa là $h_0(u) > 0$ với mọi $u \in U$. Từ đó cũng như trên, với mỗi $x \in M$, ta có:

$$h_0(x) = \sum_{u \in U} \lambda_u h_0(u) > 0.$$

(Bất đẳng thức đúng là do có ít nhất một $\lambda_u > 0$). Vậy $N = \varnothing$ và do đó $V = \varnothing$.
b) $U^- = \varnothing$ có nghĩa là $h_0(u) \geqslant 0 \forall u \in U$. Vì thế theo Định lý 1.2, $h_0(x) \geqslant 0 \forall x \in M$, nghĩa là $M \subset \{x : h_0(x) \geqslant 0\}$. Từ đó suy ra:

$$N = M \cap \{x : h_0(x) = 0\} = N \cap H \neq \varnothing$$

(do $U \backslash (U^+ \cup U^-) = U \backslash U^+ \neq \varnothing$). Chứng tỏ trường hợp này N là một diện của M, cho nên mỗi đỉnh của N cũng là một đỉnh của M. Vì vậy ta có $V = U \backslash U^+$.




Hình 1.2: Mệnh đề 1.2: $U^- = \varnothing$

**Mệnh đề 1.3.** *Giả sử $U^+ \neq \varnothing$ và $U^- \neq \varnothing$. Khi đó:*

**a)** $V \cap U = U \backslash U^+$.