ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM TRỊNH CƯƠNG CHÍNH

VỀ KỸ THUẬT TIỀN TÁC ĐỘNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CỠ LỚN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM TRỊNH CƯƠNG CHÍNH

VỀ KỸ THUẬT TIỀN TÁC ĐỘNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CỠ LỚN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGUYỄN THANH SƠN

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến thầy giáo, TS. Nguyễn Thanh Sơn đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn tôi trong suốt thời gian làm luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu của các thầy, cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học của Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã truyền thụ những kiến thức. Tôi xin cảm ơn sự động viên, giúp đỡ, chỉ bảo của gia đình, bạn bè, đồng nghiệp, Ban chuyên môn, Ban giám hiệu, Ban chấp hành Đoàn trường THPT Phạm Ngũ Lão - Ân Thi - Hưng Yên đã dành cho tôi trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Luận văn được thực hiện trong khuôn khổ của Đề tài Nghiên cứu cơ bản trong Khoa học Tự nhiên được tài trợ bởi Quỹ phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia NAFOSTED, mã số 101.01-2014.36.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Phạm Trịnh Cương Chính

Học viên Cao học Toán K7Y,

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Mở đầu

Hệ phương trình tuyến tính đã ra đời từ rất lâu và cực kỳ phổ biến trong đời sống. Rất nhiều bài toán đơn giản có thể quy về như một hệ phương trình tuyến tính. Trong số đó, ta phải kể đến bài toán dân gian

Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn.

Việc nghiên cứu lý thuyết hệ phương trình tuyến tính được bắt đầu ở bậc đại học trong khuôn khổ môn đại số tuyến tính. Liên quan đến nó, ta phải nhắc đến những định lý đẹp như: Định lí Cramer và định lý Kronecker - Capelli. Định lý Cramer cung cấp cho ta một công thức gọn gàng, dễ hiểu thu được nghiệm duy nhất (nếu có) của hệ phương trình. Tuy nhiên, cách tiếp cận này chỉ được dùng trong học đường với những hệ chỉ có vài ẩn số. Như trong chương 1 sẽ chỉ ra, giải hệ phương trình theo phương pháp Cramer cực kỳ đắt đỏ và vì thế không phù hợp với hệ cơ sở từ vừa phải đến lớn.

Để khắc phục điều đó, người ta đã tìm ra phương pháp khử Gauss, phương pháp dựa trên phân tích LU. Chúng đều là những phương pháp giải trực tiếp và có độ phức tạp tính toán đa thức bậc ba. Mặc dù, đây là bước tiến đáng kể nhưng chúng cũng chỉ áp dụng được cho hệ có kích cỡ vừa phải. Để có thể giải được những hệ phương trình cỡ lớn, ta buộc phải dùng những phương pháp lặp. Chúng mặc dù là những phương pháp gián tiếp, tính nghiệm xấp xỉ nhưng lại vô cùng hiệu quả cho những hệ lớn. Bên cạnh những phương pháp lặp cổ điển như: Jacobi, Gauss - Seidel, những phương pháp sử dụng công cụ hiện đại như phương pháp CG hay phương pháp GMRES đang trở thành những công cụ không thể thiếu trong toán học tính toán. Như sẽ chỉ ra trong chương 1, tốc độ hội tụ của phương pháp này lại phụ thuộc chặt chẽ vào số điều kiện của ma trận hệ số. Nếu ma trận có số điều kiện tốt, phương pháp hội tụ rất nhanh. Tuy nhiên, nếu không may mắn, ma trận hệ số có số điều kiện xấu, phương pháp hội tụ chậm. Câu hỏi đặt ra là làm thế nào để thay đổi thực tế đó? Kỹ thuật tiền tác động (preconditioning), là một câu trả lời.

Chính vì tầm quan trọng của kỹ thuật trên, chúng tôi đã chọn "Về kỹ thuật tiền tác động giải hệ phương trình tuyến tính cỡ lớn" là đề tài nghiên cứu cho luận văn thạc sĩ.

Mục đích chính của luận văn là nghiên cứu, trình bày một cách có hệ thống việc giải hệ phương trình tuyến tính từ những phương pháp thô sơ cho hệ nhỏ, đến những phương pháp hiện đại cho hệ lớn. Cái đích quan trọng nhất của luận văn là trình bày một số kỹ thuật tiền tác động và một số thuật toán lặp dưới tiền tác động, với ý định chỉ ra rằng tiền tác động là một công cụ góp phần quan trọng vào giải hệ phương trình tuyến tính cỡ lớn.

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là phương pháp tiền tác động để giải lặp hệ phương trình tuyến tính. Phạm vi nghiên cứu là những kỹ thuật tổng quát và cách thức khi áp dụng những kỹ thuật đó vào hai phương pháp lặp thông dụng nhất là CG và GMRES.

Phương pháp nghiên cứu chính được sử dụng là đọc hiểu những tài liệu kinh điển và trình bày lại một cách có hệ thống. Thêm vào đó, chúng tôi cũng thực hiện kiểm tra một số phương pháp thông qua việc lập trình trên MATLAB.

Ý nghĩa khoa học lớn nhất của đề tài là thực hiện một nghiên cứu liền mạch các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính, từ đơn giản đến phức tạp và trình bày lại một cách có hệ thống và dễ hiểu.

Sau khi bảo vệ luận văn là một tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên ngành toán và học viên cao học chuyên ngành Toán ứng dụng, với thiên hướng toán học tính toán.

Để đạt được các mục tiêu trên, luận văn được trình bày như sau: Chương 1 được dùng để trình bày những kiến thức chuẩn bị vô cùng quan trọng trong như: Định lí Kronecker - Capelli, định lí Cramer, một số phương pháp giải trực tiếp (khử Gauss, phân tích LU) và một số phương pháp lặp cổ điển (lặp đơn, Jacobi, Gauss - Seidel), phương pháp không gian con Krylov, làm kiến nền tảng cho nghiên cứu kỹ thuật tiền tác động. Nội dung chính của chương 2 là kỹ thuật tiền tác động tổng quát, kỹ thuật tiền tác động khối thiếu, kỹ thuật tiền tác động với các phương pháp lặp. Trong chương 3 chúng tôi trình bày một số ví dụ số để minh họa, kiểm chứng cho thuật toán.

Mặc dù đã cố gắng hết sức, nhưng vì điều kiện thời gian nghiên cứu hạn hẹp bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu xót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu từ các thầy, cô giáo và các anh, chị, em, bạn bè và đồng nghiệp.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 11 năm 2015

Phạm Trịnh Cương Chính

Học viên Cao học Toán lớp Y, khóa 01/2014-01/2016

Chuyên ngành Toán ứng dụng

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Email: `cuongchinh85@gmail.com`

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này được viết dựa trên tài liệu tham khảo [1],[2].

Trước tiên, chúng ta xét hệ phương tình tuyến tính tổng quát dạng

$$Ax = b \tag{1.1}$$

trong đó A là ma trận cỡ $n \times n$, b là ma trận cột. Ma trận A được gọi là ma trận hệ số, b được gọi là ma trận hệ số tự do.

1.1 Hệ phương trình tuyến tính

Khi giải hệ phương trình tuyến tính (1.1) ta thường quan tâm là khi nào thì nó có nghiệm và nghiệm của nó được tìm thấy bằng cách nào. Câu hỏi về sự tồn tại nghiệm của hệ (1.1) sẽ được giải đáp bằng Định lí Kronecker-Capelli .

1.1.1 Định lí Kronecker-Capelli

Định lí 1.1. *(Định lí Kronecker-Capelli) Hệ phương trình tuyến tính* (1.1) *có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận A bằng hạng của ma trận bổ sung* $\overline{A}$*. Trong đó, ma trận bổ sung là ma trận* $(A|b)$ *được xác định bằng cách đặt thêm ma trận cột tự do b vào phía bên phải của ma trận* A*.*

Định lí Kronecker-Capelli chỉ là điều kiện cần và đủ để hệ (1.1) có nghiệm, mà chúng ta chưa thể có được công thức nghiệm của nó. Trong trường hợp A là ma trận vuông cấp n có định thức det$A \neq 0$, ta có Định lí Cramer.

1.1.2 Định lí Cramer

Định lí 1.2. *(Định lí Cramer) Gọi A_j là ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bằng cột b. Khi đó, hệ* (1.1) *có nghiệm duy nhất và x_j được tính bởi công thức*

$$x_j = \frac{detA_j}{detA}.$$

Tuy nhiên, trong thực hành người ta không dùng công thức này để tính nghiệm vì số lượng phép tính quá lớn. Có thể tính toán được rằng độ phức tạp tính toán của phương pháp này là $O(n.n!)$.

1.2 Phương pháp giải trực tiếp

1.2.1 Phương pháp khử Gauss

Phương pháp khử Gauss là phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính dùng cách khử dần các ẩn để đưa hệ phương trình đã cho về một dạng tam giác trên rồi giải hệ tam giác này từ dưới lên trên mà ta không phải tính một định thức nào.

Phương pháp này được thực hiện qua các bước sau:

- *Bước* 0*:* Dùng phương trình đầu tiên để khử x_1 trong $n-1$ phương trình còn lại. Giả sử $a_{11} \neq 0$. Để cho công thức đơn giản, trước khi khử ta có thể chia phương trình thứ nhất cho a_{11}. Cụ thể, để khử x_1 ở hàng thứ $k(k = 2, 3, \dots n)$ ta phải tính lại các hệ số a_{kj} ở hàng thứ k $(j = 1, 2, .., n+1)$ như sau:

$$a_{kj} = a_{kj} - a_{1j}\frac{a_{k1}}{a_{11}}$$

  ...

- *Bước* 1*:* Dùng phương trình thứ 2 để khử x_2 trong $n-2$ phương trình còn lại phía sau. Giả sử $a_{22} \neq 0$. Để cho công thức đơn giản, trước khi khử ta có thể chia phương trình thứ hai cho a_{22}. Cụ thể, để khử x_2 ở hàng thứ $k(k = 3, 4, \dots n)$ ta phải tính lại các hệ số a_{kj} ở hàng thứ k $(j = 2, .., n+1)$ như sau:

$$a_{kj} = a_{kj} - a_{2j}\frac{a_{k2}}{a_{22}}$$