ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VIỆT PHƯƠNG

MỞ RỘNG MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VIỆT PHƯƠNG

MỞ RỘNG MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

Thái Nguyên – 2015

MỤC LỤC

PHẦN MỞ ĐẦU

Trong chương trình môn toán ở phổ thông, nội dung hình học đóng một vai trò đặc biệt quan trọng trong việc giúp học sinh hình thành, phát triển năng lực tư duy. Tuy nhiên đây cũng là một nội khó đối với cả người dạy và người học nên đa số giáo viên chỉ tập trung vào việc giúp học sinh cố gắng giải quyết được bài toán đặt ra mà chưa đưa ra được những định hướng, những dẫn dắt đề học sinh nghiên cứu tìm tòi các cách giải mới cho bài toán hay nghiên cứu xem xét bài toán dưới các góc độ khác nhau để có được những bài toán mới (*tạm gọi là bài toán mở rộng*) từ bài toán ban đầu. Đây cũng là một trong những hạn chế đối với việc rèn luyện, phát triển tư duy toán học nói chung, năng lực giải toán hình học nói riêng cho học sinh thông qua dạy học hình học.

Với mong muốn tìm hiểu, học hỏi và tích lũy thêm kinh nghiệm để phục vụ ngay chính công tác giảng dạy nội dung hình học trong ở trường phổ thông, chúng tôi mạnh dạn chọn hướng nghiên cứu của luận văn là "**Mở rộng một số bài toán hình học phẳng**" với mục đích đưa ra được một vài ví dụ minh họa việc mở rộng một bài toán trong chương trình phổ thông

Luận văn có các nhiệm vụ cụ thể sau:

(1). Tham khảo sách giáo khoa, tài liệu, chọn lọc một số bài tập có thể mở rộng, khái quát hóa.

(2). Trình bày lời chứng minh để khẳng định (hoặc bác bỏ) vấn đề đã mở rộng để làm sáng tỏ bài toán mở rộng.

(3). Đưa ra lời giải tường minh, chi tiết cho một số bài toán mở rộng.

Chương I. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1.Tổng quan về không gian Euclide

1.1.1. Một số khái niệm cơ sở

Định nghĩa 1

Một không gian affine thực được gọi là không gian Euclide nếu không gian vector liên kết là một không gian vector Euclide.

Định nghĩa 2

Cho E^n là một không gian Euclide n-chiều. Một mục tiêu affine của E^n gọi là mục tiêu trực chuẩn nếu cơ sở tương ứng là cơ sở trực chuẩn của $\vec{E}^n$. Tọa độ của điểm M $\in$ E^n đối với một mục tiêu trực chuẩn được gọi là tọa độ trực chuẩn.

Định nghĩa 3

- Khoảng cách giữa hai điểm M, N trong E, ký hiệu d(M, N), là độ dài của vector $\overrightarrow{MN}$: $d(M, N) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$.

- Khoảng cách giữa hai phẳng α và β trong E, ký hiệu d(α, β) là số $\inf_{N\in\beta, M\in\alpha} d(M,N)$. Như vậy, $d(\alpha,\beta) = \inf_{N\in\beta, M\in\alpha} d(M,N)$.

Định nghĩa 4

Góc giữa hai vector khác không $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là số θ, $0 \le \theta \le \pi$, xác định bởi :

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|.\left\|\vec{b}\right\|}$$

Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 trong E lần lượt có các vector chỉ phương là $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là số θ, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, xác định bởi: $\cos\theta = \frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left\|\vec{a}\right\|.\left\|\vec{b}\right\|}$.

Góc giữa hai siêu phẳng α và β trong E^n được định nghĩa là góc giữa hai đường thẳng lần lượt trực giao với α và β. Nếu gọi $\vec{n}$ và $\vec{m}$ lần lượt là các pháp vector của α và β, thì góc giữa hai siêu phẳng α và β tính theo công thức: $\cos\theta = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{m}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|.\left\|\vec{m}\right\|}$.

Trong không gian E cho đường thẳng d và siêu phẳng α. Khi đó, góc θ ($0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$) giữa đường thẳng d và siêu phẳng α được định nghĩa là góc phụ với góc giữa đường thẳng d và đường thẳng trực giao với α. Nếu gọi $\vec{\alpha}$ là vector chỉ phương của d và $\vec{n}$ là pháp vector của α thì θ được tính như sau: $\sin\theta = \dfrac{\left|\vec{a}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{a}\right\|.\left\|\vec{n}\right\|}$.

Định nghĩa 5

Cho m-hộp H xác định bởi điểm O và hệ m vector $\{\vec{\omega}_1,\dots,\vec{\omega}_m\}$. Khi đó thể tích của m-hộp H, ký hiệu V(H), được định nghĩa là số $\sqrt{\det Gr(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\dots,\overrightarrow{w_m})}$. Như vậy: $V(H) = \sqrt{\det Gr(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\dots,\overrightarrow{w_m})}$.

Giả sử điểm M có tọa độ $(x_1,\dots,x_n)$ và điểm N có tọa độ $(y_1,\dots,y_n)$ đối với mục tiêu trực chuẩn đã cho $\{O;\overrightarrow{e_i}\}$ của E^n. Khi đó:

$$d(M, N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - x_i\right)^2}$$

1.1.2. Ánh xạ trong không gian Euclide

Định nghĩa 6

Cho E và E’ là hai không gian Euclide. Ánh xạ affine f: E → E’ gọi là ánh xạ đẳng cự từ E vào E’ nếu $\vec{f}$ là ánh xạ tuyến tính trực giao. Nếu f là song ánh, tức là $\vec{f}$ là một đẳng cấu tuyến tính trực giao, ta nói f là một đẳng cấu đẳng cự. Khi đó E và E’ gọi là hai không gian đẳng cấu đẳng cự, ký hiệu $E \cong E'$. Một tự đẳng cấu đẳng cự từ E vào chính nó gọi là một biến đổi đẳng cự.

Định nghĩa 7 (Phép biến hình)

Ta kí hiệu tập hợp tất cả các điểm của mặt phẳng là P. Khi đó mỗi hình H bất kì của mặt phẳng đều là một tập con của P và kí hiệu $H \subset P$.

Một song ánh $f : P \to P$ từ tập điểm của P lên chính nó được gọi là một phép biến hình trong mặt phẳng:

$$\begin{aligned} f : P &\to P \\ M &\mapsto M' \end{aligned}$$

Điểm $M' = f(M)$ gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình f. Ngược lại điểm M gọi là tạo ảnh của điểm M' qua phép biến hình f nói trên.

Nếu H là một hình nào đó của H thì ta có thể xác định tập hợp $H' = \left\{ M' = f(M) \middle| M \in H \right\}$. Khi đó H' gọi là ảnh của hình H qua phép biến hình f và hình H được gọi là tạo ảnh của hình H' qua phép biến hình f đó.

Phép biến hình $f : P \to P$, biến mỗi điểm M thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.

Kí hiệu: $\begin{aligned} e : P &\to P \\ M &\mapsto M \end{aligned}$

Định nghĩa 8 (Phép dời hình)

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Xét trong mặt phẳng:

Phép tịnh tiến: Trong mặt phẳng P cho véc tơ $\vec{v}$, phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ gọi là phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}$. Kí hiệu: $T_{\vec{v}}$, véc tơ $\vec{v}$ gọi là véc tơ tịnh tiến.

Vậy: $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Phép đối xứng trục: Trong mặt phẳng P cho một đường thẳng d cố định, phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho đoạn thẳng MM' nhận d làm đường trung trực thì phép biến hình đó gọi là phép đối xứng trục d. Kí hiệu: $Đ_d$, với d là trục đối xứng.

Vậy: $Đ_d(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$ (M_0 là giao điểm của d với đoạn thẳng MM’).

Nếu điểm M thuộc đường thẳng d thì ta lấy M’ trùng với M.

Phép đối xứng tâm: Trong mặt phẳng cho điểm I, phép biến hình biến mỗi điểm M khác I thành điểm M’ sao cho I là trung điểm của đoạn MM’ gọi là phép đối xứng tâm I. Kí hiệu: $Đ_I$. điểm I gọi là tâm đối xứng.

Vậy: $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

Phép quay: Trong mặt phẳng cho điểm O và góc lượng giác α, phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M’ sao cho OM = OM’, góc lượng giác (OM, OM’) = α gọi là phép quay tâm O, góc quay α. Kí hiệu: $Q_{(O,\alpha)}$, O là tâm quay, α là góc quay.

Vậy: $Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \alpha \end{cases}$

Nhận xét : - Phép quay tâm O, góc quay 0^o là phép đồng nhất.

- Phép quay tâm O, góc quay $\pi; -\pi$ là phép đối xứng tâm O.

Định nghĩa 9 (Phép vị tự)

Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và một số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M’ sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k. Kí hiệu: $V_{(O;k)}$, O gọi là tâm vị tự, k gọi là tỉ số vị tự.

Vậy: $V_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

Định nghĩa 10 (Phép đồng dạng)

Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M’, N’ tương ứng của chúng ta luôn có M’N’ = kMN.

Nhận xét : - Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.

- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

- Phép đảo ngược của phép đồng dạng tỷ số k là phép đồng dạng tỷ số $\frac{1}{k}$.

- Tích của một phép đồng dạng tỉ số k_1 với phép đồng dạng tỉ số k_2 là một phép đồng dạng với tỉ số $k_1.k_2$.

Xét trong không gian:

Phép tịnh tiến: Trong không gian P cho véc tơ $\vec{v}$, phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ gọi là phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}$. Kí hiệu: $T_{\vec{v}}$, véc tơ $\vec{v}$ gọi là vectơ tịnh tiến.

Vậy: $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến trong không gian: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho $\vec{v}(a,b,c)$, M(x;y;z), M'(x';y';z').

Khi đó, nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$ thì $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

Phép đối xứng trục: Trong không gian P cho một đường thẳng d cố định, phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho đoạn thẳng MM' nhận d làm đường trung trực thì phép biến hình đó gọi là phép đối xứng trục d. Kí hiệu: $Đ_d$, với d là trục đối xứng

Vậy: $Đ_d(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$ (M_0 là giao điểm của d với đoạn thẳng MM').

Nếu điểm M thuộc đường thẳng d thì ta lấy M' trùng với M.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục trong không gian: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho M(x;y;z), M'(x';y';z'). Khi đó, nếu:

- $Đ_{Ox}(M) = M'$ thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$

- $Đ_{Oy}(M) = M'$ thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$

- $Đ_{Oz}(M) = M'$ thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$

Phép đối xứng tâm: Trong không gian cho điểm I, phép biến hình biến mỗi điểm M khác I thành điểm M’ sao cho I là trung điểm của đoạn MM’ gọi là phép đối xứng tâm I. Kí hiệu: $Đ_I$. Điểm I gọi là tâm đối xứng.

Vậy: $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm trong không gian: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho $I(a,b,c)$, M(x;y;z), M’(x’;y’;z’).

Khi đó, nếu $Đ_I(M) = M'$ thì $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \\ z' = 2c - z \end{cases}$

Phép đối xứng qua mặt phẳng: Trong không gian cho mặt phẳng (P), phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M’ sao cho đoạn thẳng MM’ nhận mặt phẳng (P) làm mặt phẳng trung trực, được gọi là phép đối xứng qua mặt phẳng (P). Ký hiệu $Đ_P$.

Phép quay quanh một trục: Trong không gian, cho đường thẳng định hướng Δ, φ là góc định hướng cho trước. phép biến hình biến mỗi điểm M thành M’ sao cho M, M’ thuộc mặt phẳng vuông góc với Δ tại O: OM = OM’ và (OM, OM’) = φ gọi là phép quay quanh một trục Δ.

Ký hiệu: Q(Δ, φ).

Nhận xét: - Phép quay tâm O, góc quay 0^o là phép đồng nhất.

- Phép quay tâm O, góc quay $\pi; -\pi$ là phép đối xứng tâm O.