ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ DUNG

PHÉP TÍNH PHÂN THỨ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ DUNG

PHÉP TÍNH PHÂN THỨ VÀ ỨNG DỤNG

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG
MÃ SỐ: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS.NCVC. NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

Mở đầu

Phép tính phân thứ bao gồm chủ yếu đạo hàm phân thứ và tích phân phân thứ được mở rộng từ đạo hàm cấp nguyên dương và nguyên hàm cấp cao, hay còn gọi là đạo hàm cấp nguyên âm.

Phép tính phân thứ đã được ra đời từ khá lâu và phát triển mạnh mẽ vào nửa sau của thế kỷ 20, ngày càng được nhiều người quan tâm vì đã tìm thấy nhiều ứng dụng, nhất là trong cơ học và vật lý học.

Hiện nay tài liệu về phép tính phân thứ rất phong phú. Nhiều tài liệu thiên về lý thuyết chặt chẽ, ví dụ như [3], [4] và [5](cùng các tài liệu tham khảo). Nhiều tài khác lại thiên về ứng dụng hình thức, ví dụ như [1] và [2](cùng các tài liệu tham khảo).

Ở Việt Nam, phép tính phân thứ chưa được quan tâm nhiều. Vì thế việc tìm hiểu và học tập về phép tính phân thứ là cần thiết và lý thú. Đề tài của luận văn này là "*Phép tính phân thứ và ứng dụng*". Mục đích của đề tài là: tìm hiểu và học tập về phép tính vi phân và tích phân phân thứ; viết luận văn khoa học về đề tài này thiên về ứng dụng.

Luận văn có bố cục: Mở đầu, ba chương, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày những khái niệm và các tính chất cơ bản của tích phân phân thứ $D^{-\alpha}f(x)$ và đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville $D^{\alpha}f(x)\,(\alpha \geq 0)$ của các hàm khả tổng trên khoảng hữu hạn.

Chương 2: Trình bày ứng dụng biến đổi Laplace nghiên cứu tích phân và đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville trên nửa trục thực của các hàm thỏa mãn điều kiện tồn tại của biến đổi Laplace (hàm gốc).

Chương 3: Trình bày những ứng dụng của biên đổi Laplace giải các phương trình tích phân trình Abel, phương trình vi phân thường, phương trình đạo hàm riêng phân thứ trên nửa trục thực đối với các hàm gốc.

Trong suốt quá trình học tập và làm luận văn, bên cạnh sự nỗ lực học tập, nghiên cứu và niềm đam mê Toán học của bản thân em là sự hướng dẫn tận tình của TS.NCVC.Nguyễn Văn Ngọc, Trường Đại học Thăng Long. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến Thầy.

Em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến Ban giám hiệu, phòng

Đào tạo, Khoa Toán-Tin trường Đại học khoa học, Đại học Thái Nguyên, các thầy, các cô giảng dạy lớp cao học toán K7Y đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình em học tập tại trường cũng như quá trình làm luận văn.

Em xin cảm ơn các thầy, cô trong Ban giám hiệu, các đồng nghiệp trong Tổ Toán-Tin trường trung học phổ thông Phù Cừ nơi mà em đang công tác đã luôn tạo điều kiện giúp đỡ và động viên. Xin cảm ơn bạn bè và các học viên trong lớp cao học toán K7Y đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ em trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Sự quan tâm, động viên và khích lệ của gia đình cũng là nguồn động viên lớn để em hoàn thành khóa luận này.

Tuy bản thân em có đã nhiều cố gắng, song không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự quan tâm, góp ý của quý thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Tác giả

Bùi Thị Dung

Chương 1

Khái niệm về tích phân phân thứ và đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville

Chương này trình bày một số kiến thức bổ trợ cần thiết; những khái niệm và các tính chất cơ bản của tích phân phân thứ $D^{-\alpha}f(x)$ và đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville $D^{\alpha}f(x)\,(\alpha \geq 0)$ của các hàm khả tổng trên khoảng hữu hạn. Nội dung của chương này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [2] và [3].

1.1 Kiến thức bổ trợ

1.1.1 Hàm Gamma

Giả sử z là số phức $z = x + iy$ $(i^2 = -1)$, $x = \mathrm{Re}\, z$. Hàm Gamma (hay còn gọi là tích phân Gamma) được xác định theo công thức

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \;\; x = Re\, z > 0. \tag{1.1}$$

Một số công thức cơ bản của tích phân Gamma

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \;\; \Gamma(n+1) = n!, \;\; n \in \mathbb{N},\\
&\Gamma(z)\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \;\; 0 < Re\, z < 1,\\
&\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}, \;\; \Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1.3.5...(2n+1)}{2^n}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

1.1.2 Hàm Beta

Hàm Beta $B(p,q)$ (tích phân Beta) được định nghĩa theo công thức

$$B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du, \tag{1.2}$$

trong đó p và q dương để tích phân tồn tại. Bằng phép đổi biến thông thường chỉ ra $B(p,q) = B(q,p)$.
Nếu ta đặt $u = \sin^2(\theta)$, thì tích phân trở thành

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}(\theta)\cos^{2q-1}(\theta)d\theta.$$

Nếu ta đặt $u = x/(1+x)$, thì tích phân trở thành

$$B(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx.$$

Ta có thể chứng minh

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

với mọi cách chọn $p > 0$ và $q > 0$. Ví dụ, nếu $p + q = 1$, thì ta có hệ thức

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Giá trị $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ được rút ra bằng cách đặt $p = 1/2$.

1.1.3 Hàm Mittag-Leffler

Giả sử α là một số thực, còn z là số phức. Hàm Mittag-Leffler của biến số z và tham số $\alpha > 0$ được xác định theo công thức

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \tag{1.3}$$

Một số trường hợp đặc biệt của hàm Mittag-Leffler

$$\begin{aligned}
&E_1(z) = e^z,\\
&E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}),\\
&\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n),\\
&E_{1/n}(z) = e^{z^n}\left(1 + \int_0^z \frac{t^k}{\Gamma(\frac{k}{n})}\right).dt
\end{aligned}$$

Hàm Mittag-Leffler hai tham số $E_{\alpha,\beta}(z)$ được xác định theo công thức

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \;\; \alpha > 0,\, \beta > 0. \tag{1.4}$$

1.1.4 Không gian các hàm khả tổng

Với p là số thực: $1 \leqslant p < \infty$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ta định nghĩa $L^p(\Omega)$ là lớp các hàm $f(x)$ xác định trên Ω, sao cho

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Số $\|f\|_p$ được gọi là chuẩn của hàm $f(x)$.

$L^p(\Omega)$ là một không gian Banach. Đặc biệt, $L^2(\Omega)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)} dx,$$

trong đó $\overline{g(x)}$ là liên hợp phức của $g(x)$.

Hàm xác định trên Ω được gọi là chủ yếu bị chặn trên Ω, nếu tồn tại hằng số dương C, sao cho $|f(x)| \leqslant C$ hầu khắp nơi trên Ω. Cận dưới lớn nhất của $f(x)$ được ký hiệu là

$$ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Ta ký hiệu $L^\infty(\Omega)$ là không gian của tất cả các hàm chủ yếu bị chặn trên Ω. Chuẩn trong $L^\infty(\Omega)$ được xác định theo công thức

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

trong đó sup lấy trên tất cả các phân hoạch đơn vị của $[a, b]$.

1.1.5 Biến đổi tích phân Fourier

- **Định nghĩa biến đổi Fourier**

Định nghĩa 1.1. Cho $f \in L^1(\mathbb{R})$. Hàm $\tilde{f}$ xác định bởi công thức

$$\tilde{f}(\lambda) = \mathcal{F}\{f\}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t} dt \tag{1.5}$$

được gọi là phép biến đổi Fourier của f. Giả sử $\tilde{f}(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$. Biến đổi Fourier ngược được xác định theo công thức

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \tag{1.6}$$

- **Các tính chất của biến đổi Fourier**

Tính chất 1.1. *(Định lý Riemann-Lebesgue). Nếu* $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$*, thì* $\tilde{f}(\lambda) = \mathcal{F}[f]$ *là hàm liên tục và tiến đến không khi* $|\lambda| \to +\infty$*.*

Tính chất 1.2. $f_r(x) = f(rx)$*. Ta có*

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{r}\tilde{f}\left(\frac{\lambda}{r}\right).$$

Tính chất 1.3. *Nếu các đạo hàm* $D^k f(t) = f^{(k)}(t) \in L^1(\mathbb{R})$*,* $k \leq m$ *và bằng không ở vô cùng, thì*

$$\mathcal{F}\{f^{(m)}\}(\lambda) = (i\lambda)^m \mathcal{F}\{f\}(\lambda).$$

Tính chất 1.4. *Nếu* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$*, thì tích chập* $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ *và*

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\},$$

trong đó

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

Tính chất 1.5. *Gọi* **S** *là tập hợp các hàm khả vi vô hạn và giảm nhanh, nghĩa là* $f \in \mathbb{C}^\infty$ *và*

$$\forall p, q \in, \exists M > 0, \forall x, \left| x^p f^{(q)}(x) \right| < M.$$

Khi đó $\mathcal{F}\{f\} \in \mathbf{S}$.

1.2 Tổng quan về lịch sử của phép tính vi phân phân thứ

- Trong lịch sử, Isaac Newton (1642-1727) và Gottfried Leibniz Wihelm (1646-1716) đã độc lập phát hiện ra phép tính (phân thứ) vào thế kỷ 17. Trong một công trình đáng chú ý, John Von Neumann's (1903-1957) suy nghĩ và có những nhận xét: " ... Các phép toán này là thành quả đầu tiên của Toán học hiện đại và khó đánh giá hết tầm quan trọng của nó. Tôi nghĩ rằng nó định nghĩa rõ ràng hơn bất cứ điều gì khác cho khởi đầu của Toán học hiện đại và Giải tích toán học, đó là sự phát triển logic của nó, đã tạo thành các tiến bộ kỹ thuật vĩ đại nhất trong tư duy chính xác..."
- Trong nghiên cứu phép toán của mình, Leibniz đã giới thiệu ý tưởng đầu tiên thuộc phương pháp và sử dụng ký hiệu $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ cho vi phân cấp n, trong đó n là một số nguyên không âm. L'Hospital hỏi Leibniz về khả năng