ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN NGỌC CHI

ĐỊNH LÝ ĐẾM POLYA

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN NGỌC CHI

ĐỊNH LÝ ĐẾM POLYA

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. ĐOÀN TRUNG CƯỜNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các số liệu và kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan mọi thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Họ và tên

Nguyễn Ngọc Chi

Lời cảm ơn

Sau một năm nghiên cứu miệt mài luận văn thạc sỹ của tôi với chủ đề "Định lý đếm Polya" đã được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Những kết quả ban đầu mà luận văn thu được là nhờ sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của thầy TS. Đoàn Trung Cường. Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô giáo trong khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, các bạn học viên lớp Cao học Toán K7D và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu .

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, 2015 **Nguyễn Ngọc Chi**

Học viên Cao học Toán K7D,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Cấu trúc nhóm xuất hiện một cách tự nhiên trong Toán học và Toán học phổ thông như Giải tích, Đại số, Số học, Tổ hợp. Một ví dụ tiêu biểu trong Tổ hợp là ứng dụng lý thuyết nhóm vào bài toán tô mầu thông qua bổ đề Burnside. Mục đích chính của luận văn này là trình bày bài toán tô mầu, bổ đề Burnside, các định lý Polya và ứng dụng vào các bài tập cho học sinh phổ thông.

Bổ đề Burnside là một kết quả cơ bản của lý thuyết nhóm khi vận dụng vào bài toán tô mầu với hệ quả là định lý Polya. Bài toán đặt ra là tô mầu r mảnh vải khác nhau bởi bộ n mầu. Nếu ta gọi G là một nhóm con của nhóm S_r là nhóm các phép hoán vị r mảnh vải thì hai cách tô mầu là như nhau nếu cách tô mầu này nhận được từ cách tô mầu kia bằng một phép hoán vị các mảnh vải trong G. Hỏi có bao nhiêu cách tô mầu khác nhau? Nội dung của luận văn chỉ ra được số cách tô mầu khác nhau chính là số quỹ đạo của tác động nhóm G vào tập các mảnh vải và để đếm số quỹ đạo này ta sử dụng bổ đề Burnside với hệ quả là định lý Polya.

Trong thực tế với các bài toán tô mầu ta thường gặp những yêu cầu kỹ hơn, cụ thể hơn trong cách thức tô mầu. Cụ thể với bộ mầu $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ và bộ số nguyên $t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0$ khi tô r mảnh vải bởi bộ m mầu ở bài toán trên kèm theo điều kiện mầu M_i xuất hiện đúng t_i lần. Hỏi có bao nhiêu cách tô mầu khác nhau? Để giải bài toán này ta cần sử dụng đến khái niệm hàm sinh và đa thức chỉ số xích để đi đến một công cụ mạnh hơn bổ đề Burnside đó chính là định lý đếm Polya.

Trong luận văn này bài toán tô mầu sẽ xuất hiện ở việc tô các đỉnh của một đa giác đều, tô mầu vòng cổ, tô mầu các ô vuông của lưới vuông, hay tô mầu các hình đa diện đều như tứ diện đều, khối lập phương, bát diện đều. Đồng thời luận văn cũng đề cập đến việc ứng dụng của bài toán tô mầu vào đếm số đồng phân của các phân tử hợp chất hóa học. Đây là bài toán khó nhưng có nhiều ứng dụng trong việc tìm và đặt tên các hợp chất hóa học hữa cơ.

Trên những cơ sở đó luận văn được chia thành ba chương với nội dung chính như sau:

Chương 1: Trình bày một số khái niệm cơ bản về nhóm, định lý Lagrange, tác động nhóm và công thức lớp.

Chương 2: Trình bày bổ đề Burnside, định lý Polya con và các ví dụ.

Chương 3: Là nội dung chính của luận văn, chương này trình bày định lý đếm Polya và các ví dụ.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Nguyễn Ngọc Chi

Email: `ngocchigvt@gmail.com`

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Mục đích của chương này là nhắc lại một số kiến thức về nhóm, nêu và chứng minh định lý Lagrange. Đồng thời cũng nêu định nghĩa tác động nhóm và chứng minh công thức lớp. Kiến thức này là cần thiết cho những áp dụng vào việc chứng minh các định lý ở chương sau.

1.1 Khái niệm và ví dụ về nhóm

Định nghĩa 1.1.1. Một nhóm gồm một tập hợp $G \neq \emptyset$ và một phép toán $G \times G \to G,\ (a, b) \mapsto a * b$ thỏa mãn các tiên đề:

(G_1) Tính chất kết hợp: $(a * b) * c = a * (b * c)$, với mọi $a, b, c \in G$.

(G_2) Phần tử đơn vị: tồn tại $e \in G$ sao cho $e * a = a * e = a$ với mọi $a \in G$. Phần tử e như vậy được gọi là phần tử đơn vị của G.

(G_3) Phần tử nghịch đảo: với mọi $a \in G$, có một phần tử $b \in G$ sao cho $a * b = b * a = e$. Phần tử b được gọi là phần tử nghịch đảo của a và kí hiệu là a^{-1}.

Một nhóm $(G, *)$ được gọi là một nhóm Abel hoặc nhóm giao hoán nếu tiên đề sau đây được thỏa mãn.

(G_4) Tính chất giao hoán: $a * b = b * a$ với mọi $a, b \in G$.

Về mặt kí hiệu, bên cạnh kí hiệu tích dạng $a * b$, người ta còn sử dụng các kí hiệu $a + b, ab, a \circ b, \ldots$ tùy vào từng trường hợp cụ thể. Trong chương này, với nhóm Abel nói chung ta sẽ dùng kí hiệu $+$ để chỉ phép toán, phần tử đơn vị được kí hiệu là 0 và gọi là *phần tử trung hòa*. Phần tử nghịch đảo của phần tử a khi đó sẽ được kí hiệu là $-a$ và gọi là *phần tử đối*. Trong trường hợp tổng quát, tích sẽ thường được kí hiệu là ab, phần tử đơn vị đôi khi cũng được kí hiệu là 1. Để chỉ một nhóm, ta dùng kí hiệu $(G, *)$ hoặc đơn giản là G.

Ví dụ 1.1.1. Sau đây là một số ví dụ về nhóm.

a) Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ với phép $+$ là một nhóm Abel. Phần tử trung hòa là 0, phần tử đối của $n \in \mathbb{Z}$ là $-n$. Tương tự, tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập các số thực $\mathbb{R}$ với phép cộng đều là những nhóm Abel.

b) Tập $G = \{1, -1\} \subset \mathbb{R}$ với phép nhân. Chú ý $(-1)^{-1} = -1$.

c) Tập có một phần tử $G = \{e\}$ với phép toán $e * e = e$ cũng là một nhóm. Nhóm này được kí hiệu là e và gọi là nhóm tầm thường.

d) Tập $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \backslash \{0\}$ với phép nhân. Tương tự đối với tập $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$.

e) Tập các lớp đồng dư $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ với $n \in \mathbb{Z}$ cho trước, trong đó phép toán là phép cộng $(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) := a + b + n\mathbb{Z}$. Chú ý rằng các lớp đồng dư $a + n\mathbb{Z}$ cũng hay được kí hiệu là $\overline{a}$ cho gọn.

g) Nhóm đối xứng: Xét tập khác rỗng X và đặt $S_X := \{f : X \to X \text{ là song ánh}\}$. Trên S_X có phép hợp thành các ánh xạ $(f \bullet g)(x) = f(g(x))$ và kí hiệu ánh xạ đồng nhất là id_X. Khi đó $(S_X, \bullet)$ là một nhóm với phần tử đơn vị là id_X. Nhóm này gọi là nhóm đối xứng trên các phần tử của tập X. Đặc biệt nhóm S_X là giao hoán khi và chỉ khi $|X| = 1, 2$.

h) Nếu X là tập hữu hạn có n phần tử tức là $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ thì nhóm S_X còn được kí hiệu là nhóm S_n. Một phần tử của S_n là song ánh $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Do đó hoàn toàn xác định ảnh $\varphi(1) = a_1, \varphi(2) = a_2, \ldots, \varphi(n) = a_n$. Từ đó ta có thể biểu diễn φ dưới dạng $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ là phép hoán vị n phần tử. Ngoài ra φ cũng có thể biểu diễn