ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ DIỆU HUYỀN

KHỐI TÂM VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ DIỆU HUYỀN

KHỐI TÂM VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với PGS.TS Đàm Văn Nhỉ, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô giáo trong Khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo, các bạn học viên lớp Cao học Toán K7D trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, 2015 **Nguyễn Thị Diệu Huyền**

Học viên Cao học Toán K7D,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Cho một hệ s điểm $\{M_1, M_2, \dots, M_s\}$ trong không gian $\mathbb{R}^n$ và một hệ gồm s số thực $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ với $\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k \neq 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất một điểm M để $\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k \overrightarrow{MM_k} = \vec{0}$ và với mỗi điểm P đều có

$$\left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k\right)\overrightarrow{PM} = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \overrightarrow{PM_k}.$$

Nếu $\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k = 1$ thì điểm M được gọi là *điểm khối tâm* của hệ s điểm $\{M_1, M_2, \dots, M_s\}$; còn hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ với $\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k = 1$ và $\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k \overrightarrow{MM_k} = \vec{0}$ được gọi là *tọa độ khối tâm* của M đối với hệ s điểm $\{M_1, M_2, \dots, M_s\}$.

Trong luận văn này chúng ta tìm hiểu về tọa độ khối tâm và một số ứng dụng như: Tính diện tích tam giác, tính khoảng cách theo tọa độ khối tâm và giải một số bài toán hình học trong các đề thi Olympic. Ngoài phần mở đầu và tài liệu tham khảo, luận văn gồm 2 chương với nội dung chính như sau.

Chương 1 là chương chuẩn bị, chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian vector, không gian Euclid và không gian affin.

Chương 2 trình bày khái niệm về khối tâm, toạ độ khối tâm và một số ứng dụng để tính diện tích và tính khoảng cách theo tọa độ khối tâm.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Nguyễn Thị Diệu Huyền

Email: `huyendinh.7977@gmail.com`

Chương 1

Không gian Euclid

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian véctơ, không gian afin và không gian Euclid.

1.1 Không gian véctơ

Định nghĩa 1.1.1. Cho tập V mà các phần tử được kí hiệu: $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \ldots$ và trường K mà các phần tử được kí hiệu: $a, b, c, \ldots$ Giả sử trên V có hai phép toán:

- Phép toán trong, kí hiệu: $+ : \; V \times V \to V$
$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

- Phép toán ngoài, kí hiệu: $. : \; K \times V \to V$
$$(a, \overrightarrow{v}) \mapsto a.\overrightarrow{v}$$

thỏa mãn các tính chất sau với mọi $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ và với mọi $a, b \in K$:

1) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$;

2) Có $\overrightarrow{0} \in V$ sao cho $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$;

3) Có $\overrightarrow{u'} \in V$ sao cho $\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{0}$;

4) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$;

5) $(a + b).\overrightarrow{u} = a.\overrightarrow{u} + b.\overrightarrow{u}$;

6) $a.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a.\overrightarrow{u} + a.\overrightarrow{v}$;

7) $a.(b.\overrightarrow{u}) = (a.b).\overrightarrow{u}$;

8) $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ trong đó 1 là phần tử đơn vị của trường K.

Khi đó V cùng với hai phép toán xác định như trên được gọi là một $K-$ không gian véctơ hay không gian véctơ trên trường K hay gọi tắt là không gian véctơ.

Nếu $K = \mathbb{R}$ thì V được gọi là không gian véctơ thực. Nếu $K = \mathbb{C}$ thì V được gọi là không gian véctơ phức.

Ví dụ. 1) Tập các véctơ trong không gian với các phép cộng và nhân véctơ với một số thực là một không gian véctơ thực.

2) Tập $K[x]$ các đa thức biến x với hệ số thuộc trường K với phép cộng đa thức và nhân đa thức với phần tử thuộc trường K là một $K-$ không gian véctơ.

Định nghĩa 1.1.2. 1) Một tổ hợp tuyến tính của hệ véctơ $(\overrightarrow{u_i}),\ i = 1, 2, \ldots, n$ với họ hệ số $(a_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ là

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{u_i} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \ldots a_n\overrightarrow{u_n}.$$

Nếu $\overrightarrow{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{u_i}$ thì $\overrightarrow{u}$ được gọi là biểu thị tuyến tính theo hệ $(\overrightarrow{u_i}),\ i = 1, 2, \ldots, n$.

2) Hệ véctơ $(\overrightarrow{u_i}),\ i = 1, 2, \ldots, n$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$ kéo theo $a_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Hệ véctơ $(\overrightarrow{u_i}),\ i = 1, 2, \ldots, n$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu nó không độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử V là một không gian véctơ trên K.

1) Một hệ véctơ trong V gọi là một *hệ sinh* của V nếu mọi véctơ của V đều biểu thị tuyến tính qua hệ đó.

2) Nếu V có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử thì V được gọi là một không gian véctơ hữu hạn sinh.

3) Một hệ véctơ trong V gọi là một cơ sở của V nếu mọi véctơ của V đều biểu thị tuyến tính duy nhất qua hệ đó.

Định nghĩa 1.1.4. Nếu V là không gian véctơ hữu hạn sinh thì V có cơ sở hữu hạn và số phần tử của các cơ sở trong V đều như nhau. Số đó được gọi là số chiều của không gian véctơ V. Khi V là một không gian véctơ có số chiều n ta viết $\dim V = n$.

Định nghĩa 1.1.5. Cho cơ sở $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ của $K-$ không gian véctơ n chiều V thì mọi véctơ $\overrightarrow{u} \in V$ được viết một cách duy nhất dưới dạng

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{u_i}, \quad a_i \in K.$$

Khi đó $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ được gọi là tọa độ của $\overrightarrow{u}$ đối với cơ sở $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$.

Định nghĩa 1.1.6. Tập con W của một $K-$ không gian véctơ V được gọi là không gian véctơ con của V nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

1) W đóng đối với hai phép toán của V, nghĩa là

+ $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W, \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in W.$

+ $\forall \overrightarrow{u}, \forall a \in K, \quad a.\overrightarrow{u} \in W.$

2) W cùng với hai phép toán của V là một $K-$ không gian véctơ.

Nhận xét: - Điều kiện 1) tương đương với điều kiện sau:

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W, \forall a, b \in W, \quad a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \in W.$$

- Từ điều kiện 2) suy ra W phải chứa véctơ $\overrightarrow{0}$, tức là $W \neq \varnothing$.

1.2 Không gian affine

Định nghĩa 1.2.1. Cho V là một không gian vector trên trường K và A là một tập khác rỗng mà các phần tử của nó được gọi là các điểm. Giả sử có ánh xạ

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & A \times A & \to & V \\ & (M,N) & \mapsto & \varphi(M,N) \end{array}$$

thỏa mãn hai điều kiện sau:

a) Với điểm $M \in A$ và vector $\overrightarrow{v} \in V$ đều có duy nhất $N \in A$ sao cho $\varphi(M,N) = \overrightarrow{v}$.

b) Với ba điểm $M, N, P \in A$ ta luôn có

$$\varphi(M,N) + \varphi(N,P) = \varphi(M,P).$$

Khi đó, ta nói A là một không gian affine hay đầy đủ hơn A là không gian affine trên trường K liên kết với không gian vector V bởi ánh xạ liên kết φ.

V được gọi là không gian vector liên kết với A và thường được kí hiệu lại là $\overrightarrow{A}$. Còn φ được gọi là ánh xạ liên kết và để thuận tiện cũng như trực quan hơn ta thay kí hiệu $\varphi(M,N)$ bằng $\overrightarrow{MN}$. Khi đó các điều kiện trong định nghĩa có thể được viết lại như sau:

$a')$ $\forall M \in A, \forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{A}; \exists!\ N \in A, \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{v}$;

$b')$ $M, N, P \in A; \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (hệ thức Chasles).

Khi $K = \mathbb{R}$, ta nói A là một không gian affine thực. Khi $K = \mathbb{C}$, ta nói A là một không gian affine phức.

Đôi khi ta nói A là một $K-$ không gian affine để nhấn mạnh về trường K.

Kí hiệu $(A, \overrightarrow{A}, \varphi)$ là một không gian affine. Để đơn giản ta viết tắt là $A(K)$ hay A.

Khi $\overrightarrow{A}$ là không gian vector n chiều thì ta nói A là không gian affine n chiều và dùng kí hiệu A^n để nhấn mạnh về số chiều của A. Kí hiệu số chiều của A là $\dim A$. Như vậy $\dim A = \dim \overrightarrow{A}$.

Ví dụ 1.2.1. Không gian hình học ở trung học phổ thông cùng với các véctơ trong không gian là một không gian affine.

Sau đây là một số tính chất đơn giản suy ra từ định nghĩa của không gian affine.

Định lí 1.2.1. *Với mọi $M, N, P, Q \in A$, ta có*

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ *khi và chỉ khi* $M = N$*,*

b) $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$*,*

c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ *khi và chỉ khi* $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$*,*

d) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$*.*

Chứng minh. a) Giả sử $M = N$. Theo hệ thức Chasles ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$. Do đó $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$.

Ngược lại nếu $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ thì theo chứng minh trên ta có $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$. Do đó, theo điều kiện thứ nhất trong định nghĩa 1, ta có $M = N$.

b) Theo hệ thức Chasles ta có

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}.$$

Do đó $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

c) Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$.

d) Suy ra từ hệ thức Chasles và tính chất b. □

Tiếp theo là khái niệm phẳng, độc lập affine và phụ thuộc affine. Phẳng là khái niệm mở rộng theo số chiều của các khái niệm quen thuộc như điểm (0 - chiều), đường thẳng (1 - chiều) và mặt phẳng (2 - chiều). Trong E^3, một đường thẳng d được hoàn toàn xác định nếu như chúng ta biết một điểm $P \in d$ và một vector chỉ phương $\overrightarrow{v}$ của nó. Một mặt phẳng α được hoàn toàn xác định nếu như chúng ta biết một điểm $P \in \alpha$ và một cặp vector chỉ phương