ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Teui VONGDALA

TẬP DUY NHẤT CHO CÁC HÀM PHÂN HÌNH VỚI GIÁ TRỊ KHUYẾT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Teui VONGDALA

TẬP DUY NHẤT CHO CÁC HÀM PHÂN HÌNH VỚI GIÁ TRỊ KHUYẾT

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

THÁI NGUYÊN - 2015

Lời cam đoan

Bản luận văn này là sự nghiên cứu độc lập của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Hà Trần Phương, các kết quả trong luận văn chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác ở Việt Nam.

Học viên

Teui VONGDALA

Xác nhận của trưởng khoa Toán	**Xác nhận của người hướng dẫn khoa học**
	PGS.TS. Hà Trần Phương

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS. Hà Trần Phương. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn tới PGS.TS. Hà Trần Phương - người đã tận tình dìu dắt tôi từ những bước chập những đầu tiên trên con đường nghiên cứu khoa học với tất cả niềm say mê khoa học và tâm huyết của người thầy.

Tôi cũng chân thành cảm ơn các thầy trong Viện Toán học, các thầy cô trong khoa Toán - Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy trang bị cho tôi những kiến thức cơ sở trên con đường nghiên cứu khoa học.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Phòng Đào tạo Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện cho tôi về tài liệu và thủ tục hành chính để tôi hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình của mình. Những người luôn động viên chia sẻ khó khăn và luôn mong mỏi tôi thành công.

Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến các bạn trong lớp Cao học Toán K21, đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn.

Bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 3 năm 2015

Tác giả luận văn

Teui VONGDALA

Mục lục

MỞ ĐẦU

Năm 1926, R. Nevanlinna được chứng tỏ một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ được xác định một cách duy nhất bởi ảnh ngược không tính bội của 5 phân biệt các giá trị. Công trình này của Ông được xem là khởi nguồn cho các vấn đề nghiên cứu về tập xác định duy nhất. Về sau, việc nghiên cứu sự xác định các hàm phân hình bởi ảnh ngược của một tập hữu hạn phần tử đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước.

Năm 1977, Gross ([4]) đề xuất nghiên cứu vấn đề xác định duy nhất hàm phân hình (hàm nguyên) bởi ảnh ngược của một tập hữu hạn. Khi nghiên cứu vấn đề của Gross, năm 1996 H. Yi ([11]) chứng minh hai hàm phân hình phải trùng nhau nếu chúng chung nhau tập $S = \{z : z^n + az^{n-m} + b = 0\}$, trong đó m, n là hai số nguyên dương sao cho m và n không có ước số chung, $n > 2m + 8$ $(m \geq 2)$ và a, b là các hằng số khác không sao cho phương trình $z^n + az^{n-m} + b = 0$ không có nghiệm bội Năm 1998, Fang và Hua ([3]) đã chứng minh: *nếu hai hàm phân hình f và g thỏa mãn $\Theta(\infty, f) > \frac{11}{12}, \Theta(\infty, g) > \frac{11}{12}$ và $E_f(S) = E_g(S)$ thì $f \equiv g$, trong đó $S = \{z : z^7 - z^6 - 1 = 0\}$*. Kết quả trên của Fang và Hua cho thấy một điều kiện đại số để $f \equiv g$, trong đó điều kiện đại số có chứa điều kiện về số khuyết tại ∞. Về sau có nhiều nhà toán học tiếp tục mở rộng theo hướng nghiên cứu này với mong muốn tìm ra các điều kiện đại số mới có chứa số khuyết để hai hàm phân hình trùng nhau. Chẳng hạn, Lahiri ([5]), Lahiri và Banerjee ([6]), A. Banerjee và S. Majumder ([1, 2]) ....

Với mong muốn tìm hiểu vấn đề hàm phân hình được xác định một cách duy nhất bởi điều kiện đại số có chứa giá trị khuyết, chúng tôi chọn đề tài **"Tập duy nhất cho các hàm phân hình với giá trị**

khuyết". Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả được chứng minh năm 2013 bởi A. Banerjee và S. Majumder trong [1] và [2]. Luận văn này gồm có hai chương như sau:

Chương 1: Một số kiến thức cơ sở trong lý thuyết Nevanlinna. Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna cho các hàm phân hình và một số khái niệm và kí hiệu sử dụng trong Chương 2.

Chương 2: Tập giá trị duy nhất cho các hàm phân hình với giá trị khuyết. Đây là chương chính của luận văn, chúng tôi trình bày lại một số kết quả nghiên cứu của A. Banerjee và S. Majumder về điều kiện đại số có chứa giá trị khuyết để hai hàm phân hình là bằng nhau.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna

1.1. Các hàm Nevanlinna và tính chất

Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm về không điểm và cực điểm của hàm phân hình, thường được sử dụng trong lý thuyết phân bố.

Định nghĩa 1.1. Cho hàm chỉnh hình f trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được gọi là không điểm bội $k > 0$ của hàm $f(z)$ nếu tồn tại một hàm chỉnh hình $h(z)$ không triệt tiêu trong lân cận U của z_0 sao cho trong lân cận đó hàm f được biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z).$$

Nghĩa là $f^{(n)}(z_0) = 0$, với mỗi $n = 1, ..., k-1$ và $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Định nghĩa 1.2. Điểm z_0 được gọi là cực điểm bội $k > 0$ của hàm $f(z)$ nếu trong lân cận U của z_0 hàm f được biểu diễn dưới dạng $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^k}.h(z)$, trong đó hàm $h(z)$ là hàm chỉnh hình không triệt tiêu trong lân cận U của z_0.

Với mỗi số thực $x > 0$, kí hiệu:

$$\log^+ x = \max\{\log x, 0\}.$$

Khi đó $\log x = \log^+ x - \log^+(1/x)$.

Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, $r > 0$, với mỗi $\varphi \in [0; 2\pi]$, ta có

$$\log|f(re^{i\varphi})| = \log^+|f(re^{i\varphi})| - \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right|,$$

nên

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi.$$

Định nghĩa 1.3. Hàm

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm f.

Bây giờ ta định nghĩa các hàm đếm. Cho f là hàm phân hình và $r > 0$. Kí hiệu $n(r, 1/f)$ là số không điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, 1/f)$ là số không điểm không kể bội của f, $n(r, f)$ là số cực điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, f)$ là số cực điểm không kể bội của f trong $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant |r|\}$.

Định nghĩa 1.4. Hàm

$$N(r, \infty; f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f)\log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* của f (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm). Hàm

$$\overline{N}(r, \infty; f) = \overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, f) - \overline{n}(0, f)}{t} dt + \overline{n}(0, f)\log r$$

được gọi là *hàm đếm không kể bội*. Trong đó

$$n(0, f) = \lim_{t\to 0} n(t, f),\ \overline{n}(0, f) = \lim_{t\to 0} \overline{n}(t, f).$$

Định nghĩa 1.5. Hàm

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

gọi là *hàm đặc trưng* của hàm f .

Các hàm đặc trưng $T(r, f)$, hàm xấp xỉ $m(r, f)$ và hàm đếm $N(r, f)$ là ba hàm cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị, nó còn gọi là các hàm Nevanlinna.

Tiếp theo ta đề cập đến một số hàm đếm mở rộng thường dùng trong chứng minh các định lý về xác định duy nhất hàm phân hình. Cho f là hàm phân hình và $r > 0$, kí hiệu $n_k(r, f)$ là số cực điểm bội cắt cụt bởi k trong $\overline{D}_r$ của f (tức là các cực điểm bội $l > k$ chỉ được tính k lần trong tổng $n_k(r, f)$). Hàm

$$N_k(r, f) = \int_0^r \frac{n_k(r, f) - n_k(0, f)}{t} dt + n_k(0, f) \log r$$

được gọi là *hàm đếm bội cắt cụt* bởi k, trong đó $n_k(0, f) = \lim_{t \to 0} n_k(r, f)$. Số k trong $n_k(r, f)$ được gọi là chỉ số bội cắt cụt.

Cho $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kí hiệu $n(r, 1/(f-a))$ là số các không điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, 1/(f-a))$ là số các không điểm phân biệt của $f - a$ trong $\overline{D}_r$

$$\begin{aligned} N(r, 0; f) = N(r, \frac{1}{f-a}) &= \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f-a}) - n(0, \frac{1}{f-a})}{t} dt \\ &\quad + n(0, \frac{1}{f-a}) \log r, \\ \overline{N}(r, 0; f) = \overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) &= \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \frac{1}{f-a}) - \overline{n}(0, \frac{1}{f-a})}{t} dt \\ &\quad + \overline{n}(0, \frac{1}{f-a}) \log r. \end{aligned}$$

Cho $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kí hiệu $n_{k)}(r, 1/(f-a))$ là số các không điểm kể cả bội, $\overline{n}_{k)}(r, 1/(f-a))$ là số các không điểm phân biệt của $f - a$ trong