ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ GIANG

ĐIỀU KIỆN KARUSH-KUHN-TUCKER TRONG BÀI TOÁN TỐI ƯU HÀM *r*-LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ GIANG

ĐIỀU KIỆN KARUSH-KUHN-TUCKER TRONG BÀI TOÁN TỐI ƯU HÀM *r*-LỒI

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Tóm tắt nội dung **iii**

Lời cảm ơn **v**

Danh sách ký hiệu **vi**

Danh sách hình vẽ **1**

Mở đầu **2**

1 Các tính chất đặc trưng của hàm r - lồi **4**

1.1 Một số tính chất cơ bản của hàm r-lồi 4

1.1.1 Một số tính chất cơ bản của hàm lồi 4

1.1.2 Một số tính chất cơ bản của hàm r-lồi 8

1.2 Đặc trưng hàm r-lồi 19

1.2.1 Đặc trưng hàm lồi 19

1.2.2 Đặc trưng hàm r - lồi 20

1.3 Quan hệ giữa hàm r-lồi với các hàm lồi suy rộng khác 21

2 Bài toán tối ưu với hàm r-lồi **28**

2.1 Bài toán tối ưu tổng quát 28

2.2 Tối ưu hàm r-lồi 33

2.2.1 Tối ưu hàm lồi 33

2.2.2 Tối ưu hàm r - lồi 40
2.3 Tối ưu hàm r-lồi Lipschitz địa phương 53
2.3.1 Biến đổi được về dạng r-lồi 54
2.3.2 Tính đủ của điều kiện Karush-Kuhn-Tucker 55
2.3.3 Bài toán liên quan 57
2.3.4 Ứng dụng và nhận xét 60

Kết luận và Đề nghị **64**

Tài liệu tham khảo **65**

TÓM TẮT NỘI DUNG

Mục đích của luận văn trình bày điều kiện cần và đủ tối ưu Karush-Kuhn-Tucker của bài toán qui hoạch toán học với hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc là các hàm r-lồi Lipschitz địa phương. Đồng thời luận văn cũng trình bày điều kiện cần và đủ tối ưu Karush-Kuhn-Tucker của bài toán qui hoạch toán học với hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc là các hàm r-lồi. Bên cạnh đó luận văn còn trình bày các tính chất và các đặc trưng của hàm r-lồi.

Luận văn gồm 2 chương

Chương 1: Các tính chất đặc trưng của hàm r-lồi

1.1 Một số tính chất của hàm lồi

1.1.1 Một số tính chất cơ bản của hàm lồi

Mục này trình bày định nghĩa và tính chất cơ bản của hàm lồi, có mục đích tham chiếu với định nghĩa và các tính chất cơ bản của hàm r-lồi trong mục sau.

1.1.2 Một số tính chất cơ bản của hàm r-lồi

Mục này trình bày định nghĩa, phát biểu và chứng minh các tính chất giải tích và hình học cơ bản của hàm r-lồi.

1.2 Đặc trưng của hàm r-lồi

1.2.1 Đặc trưng của hàm lồi

Mục này trình bày đặc trưng cơ bản của hàm lồi, có mục đích tham chiếu với đặc trưng cơ bản của hàm r-lồi trong mục sau.

1.2.2 Đặc trưng của hàm r-lồi

Mục này trình bày tính chất cơ bản của hàm r-lồi và một số chứng minh.

1.3 Quan hệ giữa hàm r-lồi với các hàm lồi suy rộng khác

Mục này trình bày mối liên hệ giữa lớp hàm r-lồi với các lớp hàm lồi suy rộng khác (hàm tựa lồi, hàm lồi bất biến, ...).

Chương 2: Bài toán tối ưu với hàm r-lồi

2.1 Tối ưu hàm r-lồi khả vi

Mục này trình bày bài toán tối ưu hàm r-lồi khả vi. Chứng minh điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng điều kiện Karush-Kuhn-Tucker cho bài toán quy hoạch toán học với hàm mục tiêu và các hàm hạn chế là r-lồi khả vi.

2.2 Tối ưu hàm r-lồi Lipschitz địa phương

Mục này trình bày bài toán tối ưu hàm r-lồi Lipschitz địa phương. Chứng minh điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng điều kiện Karush-Kuhn-Tucker.

Lời cảm ơn

Sau một thời gian nghiên cứu đề tài, luận văn của tôi đến nay đã được hoàn thành.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy giáo PGS.TS. Tạ Duy Phượng đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn tôi trong suốt thời gian làm luận văn. Đồng thời tôi xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu của các thầy cô giáo trong bộ môn Toán ứng dụng nói riêng và khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên nói chung đã cho tôi những kiến thức cần thiết để hoàn thành luận văn. Cuối cùng tôi xin cảm ơn sự động viên, giúp đỡ của gia đình, bạn bè đã dành cho tôi trong thời gian qua.

Tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, 2015 **Nguyễn Thị Giang**

Học viên Cao học Toán K7Y,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Danh sách ký hiệu

$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclid n-chiều.
C^1	Tập hợp các hàm khả vi cấp 1.
$x \in C$	x thuộc C (x là một phần tử của tập C).
$x \notin C$	x không thuộc C (x không là một phần tử của tập C).
$\varnothing$	Tập rỗng.
$C \cap D$	Giao của hai tập hợp C và D.
$C \cup D$	Hợp của hai tập hợp C và D.
$C \subset D$	Tập C là tập con của tập D.
$C \subseteq D$	Tập C là tập con (có thể bằng) của tập D.
$\nabla f(x)$	Véctơ gradient của hàm f tại điểm x.
$\nabla^2 f$	Ma trận Hessian của hàm f tại điểm x.
$[a, b]$	Đoạn thẳng nối hai điểm (véctơ) a và b.
$\|z\|$	Chuẩn Euclid của véc tơ z.
$epi f$	Tập trên đồ thị của hàm f.
$x^1, x^2, ...$	Liệt kê các véctơ có cùng số chiều (dùng chỉ số trên).
$\omega_1, \omega_2, ...$	Tọa độ của điểm hay thành phần của véctơ ω (dùng chỉ số dưới).
$\langle x, y \rangle, x^T y$	Tích vô hướng của hai véctơ x và y (hai véctơ có cùng số chiều).
$\partial f(x)$	Dưới vi phân của hàm f tại điểm x.
$f'(x)$	Đạo hàm cấp 1 của hàm f tại x.
$f''(x)$	Đạo hàm cấp 2 của hàm f tại x.
$coneE$	Bao nón của tập E.

Danh sách hình vẽ

1.1 Một số tập lồi trong $\mathbb{R}^2$ 5
1.2 Một số tập không lồi trong $\mathbb{R}^2$ 5
1.3 Hàm lồi 7
1.4 Hàm lõm 7

2.1 Cực tiểu (cực đại) địa phương (toàn cục) 32
2.2 Đồ thị hàm số $\phi(x) = x^3 + x^2$ 52

Mở đầu

Giải tích lồi là sự phát triển tiếp theo trong lí thuyết tối ưu khi qui hoạch tuyến tính đã được hoàn thiện. Hàm lồi là mở rộng của hàm tuyến tính và nó cho phép nghiên cứu lớp các bài toán tối ưu lồi, rộng hơn nhiều và bao hàm lớp bài toán tối ưu tuyến tính. Vì vậy Giải tích lồi đóng vai trò quan trọng trong ứng dụng toán học vào các bài toán tối ưu trong thực tế.

Tuy nhiên, nhiều bài toán trong thực tế thường không nhất thiết là lồi. Do đó cần phải mở rộng khái niệm hàm lồi. Mangasarian, Hoàng Tụy, Rockaffelar, ... là các nhà toán học có đóng góp lớn trong nghiên cứu các lớp hàm lồi suy rộng (lớp các hàm tựa lồi, giả lồi, ...).

Các nhà toán học B. Martos (1966, [11]), M. Avriel (1972-1973, [5], [6]) đã định nghĩa và nghiên cứu lớp hàm r-lồi, là một dạng mở rộng của lớp hàm lồi và có nhiều tính chất tốt khi áp dụng vào giải tích và bài toán tối ưu. Hàm số $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi (convex) trên khoảng đóng $[a, b]$ nếu với mọi $x^1, x^2 \in [a, b]$ và $\lambda \in [0, 1]$ ta có

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2).$$

Nếu dấu bất đẳng thức ngược lại thì f được gọi là hàm lõm (concave). Định nghĩa trên có thể mở rộng thành khái niệm r-lồi (xem [5]). Hàm lồi (theo nghĩa thông thường) là hàm 0-lồi (hàm r-lồi với $r = 0$).

Elżbieta Galewska, Marek Galewski (2005, [7]) đã phát biểu điều kiện cần và đủ cực trị Karush-Kuhn-Tucker cho bài toán tối ưu với hàm mục tiêu và