ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN NGỌC HẢO

PHƯƠNG PHÁP DOUGLAS - RACHFORD
TÌM KHÔNG ĐIỂM CỦA BAO HÀM THỨC ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN NGỌC HẢO

PHƯƠNG PHÁP DOUGLAS - RACHFORD TÌM KHÔNG ĐIỂM CỦA BAO HÀM THỨC ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với GS.TS. Nguyễn Bường, đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô giáo trong Bộ môn Toán - Tin, Phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, các bạn học viên lớp Cao học Toán K7D trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, 2015 **Trần Ngọc Hảo**

Học viên Cao học Toán K7D,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Toán tử đơn điệu là một trong những lĩnh vực của giải tích hiện đại đã và đang được nhiều nhà toán học hàng đầu thế giới nghiên cứu, đặc biệt phải kể đến như Browder .F .E, Rockafellar .R .T, Minty .G .J . . .

Bài toán xác định không điểm của toán tử đơn điệu có nhiều ý nghĩa quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, như khoa học vật lí, tối ưu hóa, toán kinh tế, toán tài chính . . . Ở đây, ta quan tâm đến bài toán sau:

$$\text{Tìm } x \in \mathscr{H} \text{ sao cho } 0 \in A(x) + B(x).$$

Trong đó A, B là các toán tử đơn điệu cực đại trong $\mathscr{H}$.

Đề tài của luận văn về "Phương pháp Douglas - Rachford tìm không điểm của bao hàm thức đơn điệu" để giải quyết khó khăn của việc áp dụng trực tiếp phương pháp điểm gần kề tìm toán tử giải $J_{A+B} = (I + r(A + B))^{-1}$, khi $T = A + B$. Vì thế đây là một đề tài vừa có ý nghĩa về mặt lý thuyết, đồng thời vừa có ý nghĩa thực tiễn cao.

Nội dung của luận văn được tổng hợp một số kết quả từ hai bài báo.

[5] Bot .R .I, Csetnek .E .R, Hendrich .C (2015), "Inertial Douglas-Rachford splitting for monotone inclusion problems", *Applied Mathematics and Computation*, Volume 256, P-P 472–487.

[12] Svaiter B. J. (2011), "Weak convergence on Douglas - Rachford method", *SIAM Journal on Control and Optimization* 49 (1), 280-287.

Với ý thức như vậy, luận văn được chia thành hai chương với nội dung chính như sau:

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản của không gian Hilbert, cực trị phiếm hàm lồi và phương pháp điểm gần kề giải bao hàm thức đơn điệu cực đại.

Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Chương này trình bày phương pháp Douglas - Rachford tìm không điểm của bao hàm thức đơn điệu và phương pháp Douglas - Rachford quán tính.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Trần Ngọc Hảo

Email: tranhaodk10@gmail.com

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Chương này ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản liên quan tới bài toán tìm không điểm của bao hàm thức đơn điệu. Mục 1.1 trình bày kiến thức về không gian Hilbert và cực trị của phiếm hàm lồi. Mục 1.2 giới thiệu phương pháp điểm gần kề giải bao hàm thức đơn điệu. Các kiến thức trong chương được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2], [3], [4].

1.1 Không gian Hilbert và cực trị của phiếm hàm lồi

Trước hết ta trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.1. Cho $\mathscr{H}$ là không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$, tích vô hướng xác định trong $\mathscr{H}$ là một ánh xạ

$$\langle .,. \rangle : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R},$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ với mọi $x, y \in \mathscr{H}$;

(ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ với mọi $x, y, z \in \mathscr{H}$;

(iii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, z \rangle$ với mọi $x, y \in \mathscr{H}$; $\lambda \in \mathbb{R}$;

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathscr{H}$ và $\langle x, x \rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Số $\langle x, y \rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai véc tơ x và y trong $\mathscr{H}$.

Nhận xét 1.1. Từ định nghĩa suy ra

(i) $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle y, x\rangle$;

(ii) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

(iii) $\langle x, 0\rangle = 0$.

Với mọi $x, y, z \in \mathscr{H}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2. Cặp $(\mathscr{H}, \langle ., .\rangle)$, trong đó $\mathscr{H}$ là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$, $\langle ., .\rangle$ là tích vô hướng trên $\mathscr{H}$ được gọi là không gian tiền Hilbert thực.

Định lí 1.1. *(Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz)*

Trong không gian tiền Hilbert $\mathscr{H}$, với mọi $x, y \in \mathscr{H}$ ta luôn có bất đẳng thức sau

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{1.1}$$

Chú ý 1.1. Bất đẳng thức ở định lý trên được gọi là bất đẳng thức Schwarz, trong bất đẳng thức Schwarz dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.

Định lí 1.2. *Mọi không gian tiền Hilbert $\mathscr{H}$ đều là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn được xác định bởi công thức*

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}, x \in \mathscr{H}. \tag{1.2}$$

Chuẩn này được gọi là chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng.

Nhận xét 1.2. Với kí hiệu này, với bất đẳng thức Schwarz được viết lại thành

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|.$$

Như vậy một không gian tiền Hilbert xem như không gian định chuẩn có thể đầy đủ hoặc không đầy đủ.

Định nghĩa 1.3. Nếu $\mathscr{H}$ là một không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định bởi (1.2) thì $\mathscr{H}$ được gọi là không gian Hilbert thực.

Ví dụ 1.1. $\mathbb{R}^n$ là không gian Hilbert thực với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

trong đó

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

và chuẩn cảm sinh

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Ví dụ 1.2. Xét không gian

$$\mathscr{L}^2 = \Big\{x = (x_n)_n \subset \mathbb{K} | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\Big\},$$

là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

và chuẩn cảm sinh

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2},$$

với mọi $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^2$.

Ví dụ 1.3. Gọi $C[a, b]$ là tập tất cả các hàm giá trị thực liên tục trên khoảng đóng, hữu hạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Trong $C[a, b]$ xét tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt, \qquad x(t), y(t) \in C[a, b].$$

Khi đó

• Không gian $C[a,b]$ với chuẩn

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|,$$

là không gian Banach nên $C[a,b]$ là không gian Hilbert.

• Nhưng không gian $C[a,b]$ với chuẩn

$$\|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

lại không phải là không gian Banach nên nó không phải là không gian Hilbert.

Tiếp theo chúng ta trình bày định nghĩa và tính chất đặc trưng của cực trị phiếm hàm lồi.

Định nghĩa 1.4. Cho $C \subseteq \mathbb{R}^n$ khác rỗng và $f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$. Một điểm $x^* \in C$ được gọi là cực tiểu địa phương trên C nếu tồn tại một lân cận U của x^* sao cho

$$f(x^*) \le f(x), \ \ \forall x \in U \cap C.$$

Điểm $x^* \in C$ được gọi là cực đại địa phương nếu

$$f(x^*) \ge f(x), \ \ \forall x \in U \cap C.$$

Nếu

$$f(x^*) \le f(x), \ \ \forall x \in C.$$

thì x^* được gọi là cực tiểu toàn cục hay cực tiểu tuyệt đối của f trên C.

Và nếu

$$f(x^*) \ge f(x), \ \ \forall x \in C.$$

thì x^* được gọi là cực đại toàn cục hay cực đại tuyệt đối của f trên C.