ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ BÍCH HẠNH

BÀI TOÁN QUAN HỆ BIẾN PHÂN VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ BÍCH HẠNH

BÀI TOÁN QUAN HỆ BIẾN PHÂN VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn

Thái Nguyên - Năm 2015

Mục lục

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan: Bài luận văn tốt nghiệp này là công trình nghiên cứu thực sự của cá nhân tôi, được thực hiện trên cơ sở nghiên cứu lý thuyết, nghiên cứu khảo sát và phân tích từ thực tiễn dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn.

Tôi xin cam đoan rằng số liệu và kết quả nghiên cứu được trình bày trong luận văn là hoàn toàn trung thực và chưa được sử dụng để bảo vệ cho một học vị nào, phần trích dẫn và tài liệu tham khảo đều được ghi rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, ngày 20 tháng 8 năm 2015

Tác giả

Trần Thị Bích Hạnh

Xác nhận của Khoa

Xác nhận của giáo viên hướng dẫn

GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình của GS.TSKH Nguyễn Xuân Tấn. Thầy đã dành nhieuf thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Qua đây, tôi xin gửi tới quý thầy cô Khoa Toán trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên, cũng như các thầy cô đã tham gia giảng dạy khóa cao học 2013-2015, lời cảm ơn sâu sắc nhất đối với công lao dạy dỗ trong suốt quá trình học tập của tôi tại Trường.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và các bạn đồng nghiệp thân mến đã quan tâm, tạo điều kiện và cổ vũ, động viên tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ của mình.

Mở đầu

Bài toán: Tìm $x \in D$ sao cho $F(\bar{x} \leq F(x))$ với mọi $x \in D$, ký hiệu:

$$min\{F(x)|x \in D\},$$

trong đó, D là tập con của không gian X, được gọi là miền chấp nhận được, $F : D \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu, đóng vai trò trọng tâm của lý thuyết tối ưu. Dựa vào cấu trúc của tập D và tính chất của hàm F, người ta phân loại bài toán này thành những lớp bài toán khác nhau. Nếu D là tập mở, F là hàm khả vi, ta gọi bài toán này là bài toán tối ưu trơn. Nếu F là hàm số không có đạo hàm, thì bài toán này được gọi là bài toán tối ưu không trơn. Trong lớp các bài toán tối ưu không trơn, người ta có thể phân loại thành nhiều bài toán cơ bản như bài toán quy hoach tuyến tính, quy hoạch lồi, quy hoạch Lipschits, quy hoạch liên tục, ... Bài toán tối ưu cũng được mở rộng cho trường hợp F là ánh xạ từ tập D vào một không gian tô pô tuyến tính trên đó có xác định thứ tự từng phần sinh bởi nón. Từ khái niệm thứ tự từng phần này, ta có các khái niệm khác nhau về điểm hữu hiệu của một tập hợp như: hữu hiệu lý tưởng, hữu hiệu Pareto, hữu hiệu yếu, hữu hiệu thực sự, ... Từ đó, ta có thể phát biểu các bài toán tối ưu véctơ khác nhau.

Cho X, Y là hai không gian véctơ tôpô, $D \subset X$ là một tập con khác rỗng. Cho C là một nón trong Y, $A \subset Y$. tập các điểm hữu hiệu của A đối với nón C ký hiệu là $\alpha Min(A/C)$, với $\alpha = I, P, Pr, W$, tương ứng là các loại điểm hữu hiệu lý tưởng, điểm hữu hiệu Pareto, điểm hữu hiệu thực sự và điểm hữu hiệu yếu (các khái niệm này sẽ được trình bày trong chương 1 của luận văn này).

Cho $F : D \to Y$. Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $F(\bar{x}) \in \alpha Min(F(D)/C)$ được gọi là bài toán tối ưu véctơ α tương ứng với I, P, Pr, W.

Tổng quát hơn, người ta phát triển bài toán tối ưu với F là ánh xạ đa trị và gọi là bài toán tối ưu véctơ đa trị. Ngoài ra, người ta còn nghiên cứu bài toán tối ưu với tập ràng buộc D là tập nghiệm tối ưu của một bài toán tối ưu khác, bài toán này gọi là bài toán tối ưu hai cấp. trong lý thuyết tối ưu, ta còn quan tâm đến lớp bài toán tựa(hay còn gọi là bài toán phụ thuộc tham số). năm 2001, A.Gueraggio và N.X Tấn [4] đã đưa ra bài toán sau:

A. Bài toán tựu tối ưu đơn trị loại 1.

Cho X, Y, Z là các không gian véctơ tôpô, $D \subset X, K \subset Y$ là các tập con khác rỗng và C là nón trong Z. Cho các ánh xạ đa trị $S : D \times K \rightrightarrows D$, $T : D \times K \rightrightarrows K$ và ánh xạ đơn trị $F : K \times D \times D \to Z$.

Bài toán: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho:

i) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y})$;

ii) $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$;

iii) $F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \in \alpha Min(F(\bar{y}, \bar{x}, S(\bar{x}, \bar{y}))/C)$

được gọi là bài toán tựa tối ưu véctơ α tổng quát loại 1 (α để chỉ một trong các từ: lý tưởng, Pareto, thực sự, yếu). Kí hiệu bài toán này là $(GVQOP1)_\alpha$.

Năm 2013, Đ.T.Lục và N.X.Tấn [8] đã nghiên cứa bài toán tối ưu α tổng quát loại 2, kí hiệu$(GVQOP1)_\alpha$. Bài toán này được phát biểu trong trường hợp lý tưởng như sau:

B. Bài toán tựu tối ưu đơn trị loại 2.

Cho X, Y, Z là các không gian véctơ tôpô, $D \subset X, K \subset Y$ là các tập con khác rỗng và C là nón trong Z. Cho các ánh xạ đa trị $S_1, S_2 : D \rightrightarrows D$, $T : D \times K \rightrightarrows K$ và ánh xạ đơn trị $F : K \times D \times D \to Z$.

Tìm $\bar{x}$ sao cho:

i) $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$;

ii) $F(y, x, \bar{x}) \in \alpha Min(F(y, \bar{x}, S(\bar{x}) + C)$ với mọi $x \in S_2(\bar{x}), y \in T(x, \bar{x})$.

được gọi là bài toán tựa tối ưu α loại 2.

Trong lý thuyết tối ưu, bài toán tối ưu có liên quan mật thiết đến bài toán cân bằng, với lớp bài toán cân bằng, ta xét bài toán cơ bản sau:

C. Bài toán điểm cân bằng vô hướng.

Cho D là tập con khác rỗng của không gian $X, f : D \times D \to \mathbb{R}$, $f(x, x) = 0, \forall x \in D$. Bài toán tìm $\bar{x} \in D$ sao cho:

$$f(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in D.$$

Tương tự như bài toán tối ưu, người ta cũng xét các bài toán tựa cân bằng, cụ thể là các bài toán sau.

D. Bài toán tựa cân bằng lý tưởng đơn trị loại 1.

Cho X, Y, Z là các không gian véctơ tôpô, $D \subset X, K \subset Y$ là các tập con khác rỗng và C là nón trong Z. Xét các ánh xạ đa trị $S, T : D \times K \rightrightarrows D$ và ánh xạ đơn trị $F : K \times D \times D \to Z$ thỏa mãn $F(y, x, x) \in C$, với mọi $(x, y) \in D \times K$.

Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ thỏa mãn:

i) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y})$;

ii) $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$;

iii) $F(\bar{y}, \bar{x}, x) \in C$, với mọi $x \in S(\bar{x}, \bar{y})$.

Bài toán này được gọi là bài toán tựa cân bằng loại 1 và được ký hiệu là $(IQEP1)$.

E. Bài toán tựa cân bằng lý tưởng đơn trị loại 2.

Cho X, Y, Z và W là các không gian véctơ tôpô, $D \subset X, K \subset Y, E \subset W$ là các tập con khác rỗng. Cho các ánh xạ đa trị $S_1 : D \rightrightarrows D$, $S_2 : D \rightrightarrows E$, $T : K \times D \rightrightarrows Z$và ánh xạ đơn trị $F : K \times D \times E \rightrightarrows Y$. Tìm $\bar{x} \in A$ sao cho: $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$ và $0 \in F(y, \bar{x}, x)$ với mọi $x \in S_2(\bar{x})$ và $y \in T(\bar{x}, x)$.

Bài toán này do các giáo sư Nguyễn Xuân Tấn, Đinh Thế Lục đưa ra và gọi là bài toán tựa cân bằng lý tưởng loại 2 và kí hiệu là $(IQEP2)$.

Đối với lớp các bài toán bao hàm thức biến phân, ta xét một số bài toán tiêu biểu sau:

F. Bài toán tựa biến phân lý tưởng loại 1

Cho X, Y, Z là các không gian véctơ tôpô, $D \subset X, K \subset Y$ là các tập con khác rỗng. Cho các ánh xạ đa trị $S : D \times K \rightrightarrows D$, $T : D \times K \rightrightarrows K$ với tập giá trị khác rỗng. Xét các ánh xạ đa trị $F, G : K \times D \times D \rightrightarrows Z$.

Bài toán tìm $\bar{x} \in X$ sao cho:

i) $\bar{x} \in S_1(\bar{x}, \bar{y})$;

ii) $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$;

iii) $F(\bar{y}, \bar{x}, x) \in G(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) + C$ với mọi $x \in S(\bar{x}, \bar{y})$.

Bài toán này được gọi là bài toán tựa biến phân lý tưởng loại 1 và được lí hiệu là $(IP1)$. Các bài toán về tựa biến phân có thể tìm được trong tài liệu [5]. Giáo sư Nguyễn Xuân Tấn cũng đặt ra bài toán tựa biến phân như sau:

G. Bài toán tựa biến phân lý tưởng loại 2

Cho X, Y, Z và W là các không gian véctơ tôpô, $D \subset X, K \subset Y, E \subset W$ là các tập con khác rỗng. Cho các ánh xạ đa trị $S_1 : D \rightrightarrows D$, $S_2 : D \rightrightarrows E, T : K \times D \rightrightarrows Z$và ánh xạ đơn trị $G, H : K \times D \times E \rightarrow Y$ .Giả sử $C : K \times D \rightrightarrows Y$ là ánh xạ nón (tức là, với mọi $(x, y) \in K \times D, C(y, x)$ là nón trong Y). Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho:

i) $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$;

ii) $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{x})$;

iii) $G(y, \bar{x}, x) \in H(y, \bar{x}, \bar{x}) + C(y, \bar{x})$ với mọi $x \in S_2(\bar{x})$ và $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{x})$.

được gọi là bài toán tựa biến phân lý tưởng loại 2.

Việc phân lớp các bài toán như trên là do với các bài toán khác nhau đều có phương pháp giải hữu hiệu, đặc biệt áp dụng cho từng bài toán. Tuy nhiên, việc xét các bài toán ở mức tổng quát hơn cũng rất cần thiết vì sẽ mang lại những hiểu biết sâu sắc hơn về các vấn đề, đặc biệt là về các liên hệ giữa các bài toán rời nhau. Người ta còn phát biểu các bài toán trên cho ánh xạ đa trị. Trong luận văn này, chúng ta sẽ xét bài toán quan hệ biến phân loại 2, được phát biểu như sau:

Cho A, B, Y là các tập khác rỗng. Xét $S_1 : A \rightrightarrows A$, $S_2 : A \rightrightarrows B$, $A \subseteq X, B \subseteq Z$. $T : A \times B \rightrightarrows Y$ là các ánh xạ đa trị có giá trị khác rỗng. Giả sử $R(a, b, y) \subset A \times B \times Y$ là một quan hệ ba ngôi giữa $a \in A, b \in B, y \in Y$. Nếu ba phần tử này có quan hệ R nào đó, ta nói rằng $R(a, b, y)$ xảy ra hay $R(a, b, y) \in R$.

Ta quan tâm tìm $\bar{a} \in A$ sao cho:
1) $\bar{a}$ là điểm bất động của S_1, tức là $\bar{a} \in S_1(\bar{a})$;
2) $R(a, b, y)$ xảy ra với mọi $b \in S_2(\bar{a}), y \in T(\bar{a}, b)$.

Tương tự ta cũng có thể phát biểu bài toán quan hệ biến phân loại 1. Các bài toán này có liê quan chặt chẽ với các bài toán nêu trên.Ta ký hiệu các bài toán này là (VR).

Mục đích của luận văn này là trình bày lại các kết quả chính về bài toán quan hệ biến phân trên trong bài báo **"An abstract problem in variational analysis "** của tác giả D.T.Luc [7]. Hầu hết các bài toán của lý thuyết điều khiển tối ưu được liệt kê ở trên đều là trường hợp riêng của bài toán quan hệ biến phân. Việc nghiên cứu bài toán quan hệ biến phân cho ta một cách tiếp cận thống nhất trong việc nghiên cứu các mô hình khác nhau của lý thuyết điều khiển tối ưu đa trị, lý thuyết cân bằng và bao hàm thức biến phân. Kết quả chính được trình bày trong luận văn là định lý tồn tại nghiệm của bài toán quan hệ biến phân, Từ đó với mỗi bài toán liên quan chúng ta sẽ nhận những điều kiện để tồn tại nghiệm.

Luận văn chia làm 2 chương.

Chương 1 là chương chuẩn bị. Trong chương này người viết nêu lại một cách ngắn gọn các khái niệm, tính chất của nón và ánh xạ đa trị để tiện cho việc trình bày các kết quả chương sau. Các khái niệm này có thể tìm được trong tài liệu [1] và các tài liệu khác về tối ưu véctơ. Một số định lý cơ bản của lý thuyết tối ưu cũng được liệt kê ở phần cuối chương nhằm giúp người đọc dễ theo dõi được các chứng minh của định lý có trong chương sau. Các định lý này đều được chứng minh lại trong luận văn, chúng có thể được tìm thấy trong các tài liệu tham khảo.

Chương 2 là phần chính của luận văn. Trong chương này, người viết trình bày lại bài toán quan hệ biến phân, chứng minh một cách chi tiết các định lý tồn tại, đồng thời đưa ra một số ví dụ về các bài toán liên quan. Có thể nói bài toán quan hệ biến phân là bài toán tổng quát của lý thuyết tối ưu bởi, với mỗi bài toán như bài toán tối ưu, bài toán cân bằng, bài toán bao hàm thức biến phân, bằng cách trang bị một quan hệ R thích hợp ta có thể đưa về bài toán (VR). Nội dung được trình bày trong chương này gồm: Phát biểu bài toán quan hệ biến phân (VR), các ví dụ có liên quan, các định lý về sự tồn tại nghiệm của bài toán quan hệ biến phân (VR).

Tiếp theo ta thiết lập một số điều kiện tồn tại nghiệm của các bài toán: bài toán tối ưu loại 2, bài toán bao hàm thức tựu biến phân, bài toán tựu cân bằng tổng quát bằng cách sử dụng định lý tồn tại nghiệm