ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**TRẦN THỊ THƯƠNG**

# NHÓM BIẾN ĐỔI VÀ ĐỊNH LÝ BURNSIDE

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**Thái Nguyên - 2015**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**TRẦN THỊ THƯƠNG**

# NHÓM BIẾN ĐỔI VÀ ĐỊNH LÝ BURNSIDE

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp**
**Mã số: 60 46 01 13**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**Người hướng dẫn khoa học:**

**PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ**

**Thái Nguyên - 2015**

# Mục lục

# Lời nói đầu

Trong lý thuyết số, người ta quan tâm đến sự biểu diễn mỗi số ra thành tích các số nguyên tố. Trong lý thuyết nhóm hữu hạn, người ta quan tâm đến chuỗi hợp thành gồm các nhóm con của nó. Mỗi nhóm hữu hạn $G$ có một chuỗi hợp thành dạng

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{k-1} \trianglelefteq G_k = G$$

trong đó mỗi nhóm thương $G_{i+1}/G_i$ là nhóm đơn với $i = 0, 1, \ldots, k-1$ và Định lý Jordan-Hölder kết luận rằng, hai chuỗi hợp thành là tương đương. Vấn đề đặt ra: Phân loại tất cả các nhóm đơn hữu hạn và xác định tất cả các cách xây dựng các nhóm khác nhóm đơn. Vấn đề này dẫn đến những nghiên cứu nhóm đơn hữu hạn vào cuối thế kỷ 19. Tiếp theo các công trình của nhà toán học người Đức Otto Hölder và nhà toán học người Mỹ Frank Nelson Cole, nhà toán học người Anh Willian Burnside đã tìm ra tất cả các nhóm đơn hữu hạn cấp nhỏ hơn hoặc bằng 1092 vào năm 1895. Đặc biệt, ông đã chứng minh được rằng, nhóm với cấp là tích của hai hoặc ba số nguyên tố là giải được. Định lý Burnside có vai trò quan trọng trong Lý thuyết nhóm qua việc phân lớp các nhóm đơn hữu hạn. Nhiều nhà toán học rất quan tâm đến kết quả này. Việc phân lớp được hoàn thành vào năm 1980. Đi liền với Định lý Burnside là phỏng đoán về nhóm đơn hữu hạn không abel với cấp là một số chẵn. Hơn 50 năm sau, vào năm 1963 phỏng đoán này đã được chứng minh bởi hai nhà toán học Mỹ Walter Feit và John Griggs Thompson. Định lý Burnside rất quan trọng trong Lý thuyết nhóm. Việc tìm hiểu và chứng minh lại Định lý này là có ý nghĩa đối với những ai quan tâm đến Lý thuyết nhóm.

Vấn đề tiếp theo luận văn quan tâm là bài toán tô màu xuất hiện trong các kì thi đại học, học sinh giỏi cấp quốc gia hay quốc tế. Nhiều bài toán tổ hợp liên quan tới các đối tượng khác nhau, chẳng hạn: dùng hai màu để tô ba đỉnh của tam giác ABC. Do $A, B, C$ phân biệt nên việc xác định số cách tô màu là dễ dàng. Nếu ta coi ba đỉnh của tam giác là ba điểm trắng như nhau thì việc tính số cách tô màu là không dễ dàng. Với bài toán liên quan đến quan hệ tương đương, việc giải quyết cho tất cả các phần tử thuộc lớp thông qua một phần tử đại diện. Chính vì vậy luận văn đặt vấn đề vận dụng Toán cao cấp vào nghiên cứu một số bài toán tổ hợp. Đề tài trong luận văn cũng quan tâm đến việc chứng minh Bổ đề Burnside để từ đó xác định lời giải cho bài toán tô màu.

Đề tài của luận văn quan tâm là nghiên cứu Bổ đề Burnside, Định lý Burnside trong Lý thuyết nhóm và vận dụng các kết quả đạt được vào Toán sơ cấp qua bài toán tô màu và phương trình giải được bằng căn thức.

Luận văn này trình bày lại một số kết quả về lý thuyết nhóm, Bổ đề Burnside và Định lý Burnside chủ yếu theo tài liệu [1] ,[2] và [5]. Luận văn được chia ra làm hai chương. Chương 1 gồm sáu mục. Mục 1.1 trình bày về quan hệ tương đương. Trong Mục 1.2 tập trung nhắc lại khái niệm nhóm, nhóm con chuẩn tắc. Trong mục này chúng tôi đã chứng minh Định lý Lagrange về mối quan hệ giữa cấp của nhóm và cấp của nhóm con, Định lý 1.3 và Hệ quả 1.2, Hệ quả 1.3. Mục 1.3 được dành để viết về khái niệm tác động nhóm lên một tập. Mục 1.4 đã chứng minh hai kết quả về nhóm giải được, Định lý 1.11 và Định lý 1.12. Mục 1.5 trình bày về nhóm các phép thế, nhóm đối xứng. Cuối cùng là Mục 1.6, tập trung trình bày về biểu diễn nhóm hữu hạn. Chương 2 gồm ba mục. Mục 2.1 tập trung chứng minh Bổ đề Burnside. Mục 2.2 chứng minh lại Định lý Burnside qua việc vận dụng hai bổ đề. Mục 2.3 trình bày một vài ví dụ về việc vận dụng Bổ đề Burnside vào bài toán tô màu và vận dụng Định lý Burnside vào phương trình giải được qua căn thức. Luận văn đã chỉ ra những đa thức bậc $\leqslant 4$ giải được bằng căn.

Trong thời gian sưu tầm tài liệu, làm đề cương và viết luận văn, tôi đã nhận được sự góp ý và chỉ dẫn tận tình của người hướng dẫn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy của mình, PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ. Nhân đây, tôi cũng xin chân thành cảm ơn Khoa Toán - Tin, Khoa Sau đại học Trường Đại học Khoa học - Đại học

Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình học tập của tôi. Tôi cũng xin được cảm ơn sự nhiệt tình giảng dạy của các giảng viên trong suốt thời gian tôi học tập. Tôi xin cảm ơn Ban giám hiệu Trường THPT Hải An - Hải Phòng đã luôn tạo điều kiện tốt cho tôi công tác và học tập, để tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập của mình. Cuối cùng, tôi xin gửi những lời cảm ơn đặc biệt nhất tới đại gia đình, vì những động viên khích lệ giúp tôi hoàn thành luận văn này.

*Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2015*

**Trần Thị Thương**

*Học viên Cao học Toán lớp B, khóa 06/2013-06/2015*

*Chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp*

*Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên*

Email: `namthuong07@gmail.com`

# Chương 1

# Lý thuyết nhóm

## 1.1 Quan hệ tương đương

Giả thiết tập $X \neq \emptyset$. Tích DesCarte $X \times X$ được định nghĩa như sau:

$$X \times X = \{(x, y) | x, y \in X\}.$$

**Định nghĩa 1.1.** Tập con $S$ của $X \times X$ được gọi là một *quan hệ hai ngôi* trong $X$. Nếu $(x, y) \in S$ thì ta nói $x$ *có quan hệ* $S$ *với* $y$ và viết $xSy$.

**Định nghĩa 1.2.** Giả thiết $X \neq \emptyset$ và $S \neq \emptyset$ là một quan hệ hai ngôi trong $X$. Quan hệ $S$ được gọi là một *quan hệ tương đương* trong $X$ nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

(1) (Phản xạ) Với mọi $x \in X$ có $xSx$.

(2) (Đối xứng) Với mọi $x, y \in X$, nếu có $xSy$ thì cũng có $ySx$.

(3) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in X$, nếu có $xSy$, $ySz$ thì có $xSz$.

Khi $S$ là một quan hệ tương đương trong $X$ thì ta thường ký hiệu $\sim$ thay cho $S$. Đặt $C(x) = \{y \in X | y \sim x\}$ và gọi nó là một *lớp tương đương* với $x$ làm *đại diện*. Dễ dàng chỉ ra các tính chất sau:

**Mệnh đề 1.1.** *Giả sử* $\sim$ *là quan hệ tương đương trong* $X$. *Khi đó*

(1) *Với mọi* $x \in X$ *có* $x \in C(x)$.

(2) *Với mọi* $y, z \in C(x)$ *có* $y \sim z$ *và* $y \sim x, z \sim x$.

(3) *Với mọi* $x, y \in X$, *có hoặc* $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ *hoặc* $C(x) = C(y)$.

(4) *Tập thương* $X/\sim$ *là tập các lớp tương đương không giao nhau.*

**Ví dụ 1.1.** Chứng minh rằng không tồn tại ánh xạ $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, 3\}$ thỏa mãn $f(x) \neq f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho $|x - y| \in \{2, 3, 5\}$.

*Bài giải.* Không hạn chế có thể giả thiết $f(0) = 1$ và $f(5) = 2$. Vì $5 - 2 = 3$ và $2 - 0 = 2$ nên $f(2) = 3$. Vì $7 - 2 = 5$ và $7 - 5 = 2$ nên $f(7) \neq f(2)$, $f(7) \neq f(5)$. Vậy $f(7) = 1$. Vì $3 - 0 = 3$ và $5 - 3 = 2$ nên $f(3) = 3$, $f(3) = f(2)$. Tóm lại, ánh xạ $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, 3\}$ thỏa mãn

$$f(0) = 1, f(2) = 3, f(3) = 3, f(5) = 2, f(7) = 1.$$

Với mọi $n \in \mathbb{Z}$ có $n + 1 - n = 1 \notin \{2, 3, 5\}$ nên $f(n + 1) = f(n)$. Vì hàm hằng $f$ không thỏa mãn $f(7) = 1 \neq 2 = f(5)$ nên không thể có ánh xạ $f$ thỏa mãn đầu bài. □

**Ví dụ 1.2.** Với bất kỳ số tự nhiên $n$ tập nghiệm nguyên của hai phương trình $x^2+y^2 = n$ và $x^2 + y^2 = 2n$ có cùng lực lượng.

*Bài giải.* Xây dựng một song ánh từ tập nghiệm này sang tập nghiệm kia qua $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ và ngược lại $(x, y) \mapsto (\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2})$. □

## 1.2 Khái niệm nhóm

### 1.2.1 Nhóm con chuẩn tắc và nhóm thương

Trước tiên, ta nhắc lại một số khái niệm và ký hiệu về nhóm.

**Định nghĩa 1.3.** Tập $G \neq \emptyset$ với phép toán $G \times G \to G, (x, y) \mapsto x.y$ được gọi là một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau:

(1) $(x.y).z = x.(y.z)$ với mọi $x, y, z \in G$.

(2) Có phần tử $e \in G$, được gọi là *đơn vị*, thỏa mãn $e.x = x.e = x$ với mọi $x \in G$

(3) Với mỗi $x \in G$ có phần tử $x' \in G$ để $x.x' = x'.x = e$.

Do tính duy nhất của $x'$ cho mỗi $x$ nên $x'$ được ký hiệu qua $x^{-1}$ và được gọi là *phần tử nghịch đảo* của $x$. Nhóm $G$ được gọi là một *nhóm giao hoán* hay *nhóm abel* nếu $x.y = y.x$ với mọi $x, y \in G$. Để đơn giản, nhiều khi thay cho tích $x.y$ ta viết đơn giản $xy$ và đôi khi để biết phép toán hai ngôi trong nhóm $G$ ta cũng thường viết $(G, .)$.

**Định nghĩa 1.4.** Cho hai nhóm $(G, .)$ và $(G', \circ)$. Ánh xạ $\phi : G \to G'$ được gọi là một *đồng cấu* nếu $\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$ thỏa mãn cho mọi $x, y \in G$. Đồng cấu $\phi$ được gọi là một *đẳng cấu* nếu nó là một song ánh.

**Định nghĩa 1.5.** Cho nhóm $G$. Lực lượng của $G$, ký hiệu $|G|$, được gọi là *cấp* của $G$. Nếu $|G| < \infty$ thì $G$ được gọi là *nhóm hữu hạn*. Nhóm cấp $p^s$, ở đó $p$ là số nguyên tố và $s \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một *p-nhóm.* Giả thiết nhóm $G$ có cấp $p^s m$, trong đó $p$ là số nguyên tố và $p \not| m$. Nhóm con cấp $p^s$ của nhóm $G$ được gọi là *p-nhóm con Sylow.*

**Định nghĩa 1.6.** Tập con $H$ khác rỗng của nhóm $G$ thỏa mãn $x.y \in H$ và $x^{-1} \in H$, khi $x, y \in H$, được gọi là một *nhóm con* của $G$. Nhóm con $A$ của nhóm $G$ được gọi là một *nhóm con chuẩn tắc* của $G$ nếu $xax^{-1} \in A$ với mọi $a \in A, x \in G$.

Giả thiết $A$ là một nhóm con của nhóm $G$. Ta ký hiệu hai tập sau:

$$xA = \{xa | a \in A\}, Ax = \{ax | x \in A\}.$$

Tập $xA$ được gọi là *lớp ghép trái* của $A$ trong $X$; Tập $Ax$ được gọi là *lớp ghép phải* của $A$ trong $G$. Ký hiệu tập thương của $G$ trên $A$ qua

$$G/A = \{xA | x \in G\}.$$

Tiếp tục, định nghĩa quan hệ $\sim$ trong nhóm $G$ như sau: Với $x, y \in G$, quan hệ $x \sim y$ nếu $x^{-1}y \in A$.

**Bổ đề 1.1.** *Quan hệ $\sim$ trong $G$ là một quan hệ tương đương.*