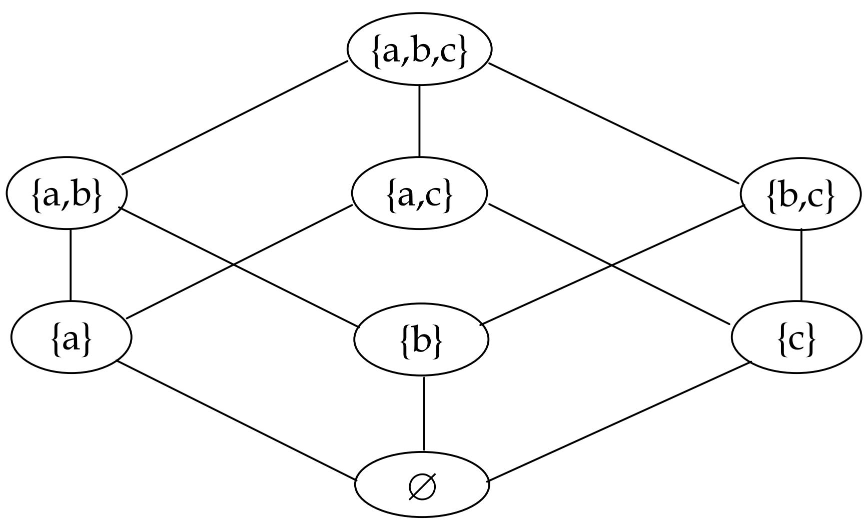
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN GIA ĐỊNH

GIÁO TRÌNH

CƠ SỞ TOÁN HỌC



HUẾ – 2005

LỜI NÓI ĐẦU

Những người mới bắt đầu nghiên cứu toán học thường cảm thấy khó xây dựng thói quen phát biểu một cách chặt chẽ những ý kiến muốn trình bày, khó học tập các phương pháp lập luận đúng đắn và khó nắm được các khái niệm cơ bản của toán học. Những khó khăn này dường như bắt nguồn từ chỗ: một là không được luyện tập về lôgic toán, một chủ đề nghiên cứu cách lập luận suy diễn áp dụng vào việc chứng minh các định lý toán học; hai là do thiếu các khái niệm cơ bản và các phương pháp dùng trong lý thuyết tập hợp mà ngày nay thường được áp dụng trong mọi ngành toán học và dùng làm cơ sở để khai phá và giải thích các khái niệm cơ bản của toán học (như ánh xạ, quan hệ, ...); ba là do không nắm được những khái niệm cơ bản của đại số trừu tượng, một chủ đề đang phát triển mạnh mẽ và có ảnh hưởng đến mọi ngành toán học khác, cụ thể qua các cấu trúc đại số của các tập hợp số quen thuộc (như tập các số tự nhiên, tập các số nguyên, tập các số hữu tỉ, tập các số thực và tập các số phức).

Được sự động viên mạnh mẽ của các đồng nghiệp trong các Khoa Toán-Cơ-Tin học, Công nghệ Thông tin và Vật lý (Trường Đại học Khoa học-Đại học Huế), các Khoa Toán và Tin học (Trường Đại học Sư phạm-Đại học Huế) và đặc biệt do nhu cầu học tập của các sinh viên trong Đại học Huế ở các Khoa nói trên, chúng tôi mạnh dạn viết giáo trình *Cơ sở Toán học*, trong khi trên thị trường sách có khá nhiều tài liệu liên quan đến học phần này (nhưng được trình bày tản mạn và rời rạc). Điều mà chúng tôi mong muốn là các kiến thức của học phần này phải được đưa vào đầy đủ, cô đọng, chính xác, cập nhật và bám sát theo yêu cầu đào tạo sinh viên các ngành Toán, Vật lý, Công nghệ Thông tin và một số ngành kỹ thuật khác của các trường đại học và cao đẳng. Với sự nổ lực hết mình của bản thân, chúng tôi thiết nghĩ đây còn là tài liệu tham khảo tốt cho các giáo viên giảng dạy học phần Nhập môn Đại số hay Cơ sở Toán học

Nội dung của tài liệu này được bố trí trong 6 chương. Trong các phần của mỗi chương có nhiều thí dụ cụ thể minh hoạ cho những khái niệm cũng như những kết quả của chúng. Cuối của mỗi chương là những bài tập được chọn lọc từ dễ đến khó bám theo nội dung của chương đó và liền sau đó là các lời giải của chúng. Đó là các chương về *Lôgic toán và tập hợp, Ánh xạ, Quan hệ, Số tự nhiên và số nguyên, Số hữu tỉ, số thực và số phức, Đa thức.*

Chúng tôi xin chân thành cám ơn các đồng nghiệp đã động viên và góp ý cho công việc viết giáo trình *Cơ sở Toán học* này và lời cám ơn đặc biệt xin dành cho Khoa Toán-Cơ-Tin học (Trường Đại học Khoa học-Đại học Huế) về sự giúp đỡ quý báu và tạo điều kiện thuận lợi cho việc xuất bản giáo trình này.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Tác giả mong nhận được sự chỉ giáo của các đồng nghiệp và độc giả về những thiếu sót khó tránh khỏi của cuốn sách.

Cố Đô Huế, Ất Dậu Trọng Đông (2005)

Nguyễn Gia Định

CHƯƠNG I:
LÔGIC TOÁN VÀ TẬP HỢP

1.1. LÔGIC TOÁN.

1.1.1. Mệnh đề và các phép toán lôgic:

1.1.1.1. Mệnh đề: Mệnh đề là một câu phản ánh một điều đúng hoặc sai, chứ không phải vừa đúng vừa sai.

Thí dụ:

1) Số 35 chia hết cho 5: mệnh đề đúng.

2) Mặt trời quay quanh trái đất: mệnh đề sai.

3) Tam giác ABC có 3 góc vuông: mệnh đề sai.

4) $2 < 5$: mệnh đề đúng.

Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh, ... và nói chung các câu không nhằm phản ánh tính đúng sai của thực tế khách quan đều không được coi là mệnh đề.

Trong lôgic mệnh đề, ta không quan tâm đến cấu trúc ngữ pháp cũng như ý nghĩa nội dung của mệnh đề mà chỉ quan tâm đến tính đúng sai của mỗi mệnh đề.

Để chỉ các mệnh đề chưa xác định, ta dùng các chữ cái: $p, q, r, ...$ và gọi chúng là các biến mệnh đề. Ta quy ước viết $p = 1$ khi p là mệnh đề đúng và $p = 0$ khi p là mệnh đề sai. Các giá trị 0 và 1 gọi là các giá trị chân lý của các mệnh đề.

George Boole đã nghiên cứu phương pháp tạo ra các mệnh đề mới bằng cách tổ hợp từ một hoặc nhiều mệnh đề đã có. Các mệnh đề mới được gọi là các mệnh đề phức hợp, chúng được tạo ra từ các mệnh đề hiện có bằng cách dùng các phép toán lôgic.

1.1.1.2. Phép phủ định: Phủ định của mệnh đề p , ký hiệu là $\overline{p}$, đọc là "không p", là mệnh đề sai khi p đúng và đúng khi p sai.

Phép phủ định trong lôgic mệnh đề phù hợp với phép phủ định trong ngôn ngữ thông thường, nghĩa là phù hợp với ý nghĩa của từ "không" ("không phải").

Thí dụ: **1)** p: "9 là một số lẻ" (Đ), $\overline{p}$: "9 không là một số lẻ" (S).

2) p: "với mọi số thực x, y, $(x + y)^2 < 0$" (S), $\overline{p}$: "tồn tại số thực x, y, $(x + y)^2 \geq 0$" (Đ).

1.1.1.3. Phép hội: Hội của hai mệnh đề p, q, ký hiệu là $p \wedge q$, đọc là "p và q", là một mệnh đề đúng khi cả p lẫn q cùng đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

Phép hội phù hợp với ý nghĩa của liên từ "và" của ngôn ngữ thông thường.

Thí dụ: **1)** p: "2 là số nguyên tố" (Đ) và q: "2 là số chẵn" (Đ) thì $p \wedge q$: "2 là số nguyên tố và là chẵn" (Đ).

2) Mệnh đề "Số π lớn 3 và là một số hữu tỉ" (S) là hội của hai mệnh đề "Số π lớn hơn 3" (Đ) và "Số π là một số hữu tỉ" (S).

1.1.1.4. Phép tuyển: Tuyển của hai mệnh đề p, q, ký hiệu $p \vee q$, đọc là "p hoặc q", là một mệnh đề sai khi cả p lẫn q đều sai và đúng trong mọi trường hợp còn lại.

Phép tuyển ứng với liên từ "hoặc" trong ngôn ngữ thông thường theo nghĩa không loại trừ, có nghĩa là mệnh đề "p hoặc q" đúng khi và chỉ khi ít nhất một trong hai mệnh đề p và q đúng.

Thí dụ: 1) p: "3 nhỏ hơn 5" (Đ) và q: "3 bằng 5" (S) thì $p \vee q$: "3 nhỏ hơn hoặc bằng 5" (Đ).

2) p: "Paris là thủ đô nước Anh" (S) và q: "6 lớn hơn 8" (S) thì $p \vee q$: "Paris là thủ đô nước Anh hoặc 6 lớn hơn 8" (S).

1.1.1.5. Phép tuyển loại: Tuyển loại của hai mệnh đề p, q, ký hiệu $p \oplus q$, đọc là "p hoặc q (nhưng không cả hai)", là một mệnh đề đúng khi chỉ có một trong hai mệnh đề p và q là đúng và sai trong mọi trường hợp còn lại.

Phép tuyển loại ứng với liên từ "hoặc" trong ngôn ngữ thông thường theo nghĩa loại trừ.

Thí dụ: p: "$\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ" (S) và q: "$\sqrt{2}$ là một số vô tỉ" (Đ) thì $p \oplus q$: "$\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ hoặc là một số vô tỉ" (Đ).

1.1.1.6. Phép kéo theo: Mệnh đề kéo theo $p \Rightarrow q$, đọc là "p kéo theo q" hay "nếu p thì q", là một mệnh đề sai khi p đúng và q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Trong phép kéo theo nói trên, p được gọi là giả thiết, còn q được gọi là kết luận.

Vì phép kéo theo xuất hiện ở nhiều nơi trong các suy luận toán học, nên có nhiều thuật ngữ được dùng để diễn đạt mệnh đề $p \Rightarrow q$. Dưới đây là một số thí dụ thường gặp nhất.

– "Nếu p thì q",
– "p kéo theo q",
– "Từ p suy ra q",
– "p là điều kiện đủ để có q",
– "q là điều kiện cần để có p".

Thí dụ: 1) "Nếu hôm nay trời nắng, chúng tôi sẽ đi ra bãi biển" là một mệnh đề kéo theo và được xem là đúng trừ phi hôm nay trời thực sự nắng, nhưng chúng tôi không đi ra bãi biển.

2) "Nếu hôm nay là thứ hai thì $3 + 5 = 7$" là một mệnh đề kéo theo và là đúng với mọi ngày trừ thứ hai.

Trong suy luận toán học, chúng ta xét các phép kéo theo thuộc loại tổng quát hơn trong ngôn ngữ thông thường. Khái niệm toán học về phép kéo theo độc lập với mối quan hệ nhân - quả giữa giả thiết và kết luận.

Không may, cấu trúc nếu - thì được dùng trong nhiều ngôn ngữ lập trình lại khác với cấu trúc được dùng trong lôgic toán. Đa số các ngôn ngữ lập trình chứa những câu lệnh như **nếu** p **thì** S (**if** p **then** S), trong đó p là một mệnh đề còn S là một đoạn chương trình (gồm một hoặc nhiều lệnh cần phải thực hiện). Khi thực hiện một chương trình gặp những cấu trúc như vậy, S sẽ được thực hiện nếu p là đúng, trong khi đó S sẽ không được thực hiện nếu p là sai.

1.1.1.7. Phép tương đương: Mệnh đề "p tương đương q", ký hiệu là $p \Leftrightarrow q$, là một mệnh đề đúng khi p và q có cùng giá trị chân lý và sai trong các trường hợp còn lại.

Định nghĩa của phép tương đương phù hợp với ý nghĩa của cụm từ "khi và chỉ khi" hay "nếu và chỉ nếu" của ngôn ngữ thông thường. Trong toán học, mệnh đề "p tương đương q" có thể diễn đạt dưới dạng: "điều kiện cần và đủ để có p là có q".

Thí dụ: 1) Điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ cân là hai góc ở đáy của nó bằng nhau.

2) Dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức Cauchy

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Sau đây là bảng chân trị của các phép toán lôgic nói trên.

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

1.1.1.8. Các phép toán lôgic và các phép toán bit: Các máy tính dùng các bit để biểu diễn thông tin. Một bit có hai giá trị là 0 và 1. Ý nghĩa của từ này bắt nguồn từ *binary digit* (số nhị phân). Thuật ngữ này do nhà Thống kê học nổi tiếng John Turkey đưa ra vào năm 1946. Bit cũng có thể được dùng để biểu diễn giá trị chân lý. Ta sẽ dùng bit 1 để biểu diễn giá trị đúng và bit 0 để biểu diễn giá trị sai.

Ta sẽ dùng các ký hiệu NOT, AND, OR, XOR thay cho các phép toán $-, \wedge, \vee, \oplus$ như thường được làm trong các ngôn ngữ lập trình khác nhau.

Thông tin thường được biểu diễn bằng cách dùng các xâu bit, đó là dãy các số 0 và 1. Khi đã làm như thế, các phép toán trên các xâu bit cũng có thể được dùng để thao tác các thông tin đó. Ta có thể mở rộng các phép toán bit tới các xâu bit. Ta định nghĩa các OR bit, AND bit và XOR bit đối với hai xâu

bit có cùng chiều dài là các xâu có các bit của chúng là các OR, AND và XOR của các bit tương ứng trong hai xâu tương ứng.
Thí dụ:

xâu 1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
xâu 2	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
OR bit	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
AND bit	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
XOR bit	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1

1.1.2. Sự tương đương lôgic của các công thức:

Trong lôgic mệnh đề, người ta đưa ra khái niệm công thức, tương tự như khái niệm biểu thức trong toán học.

1.1.2.1. Định nghĩa:

1) Các biến mệnh đề $p, q, r, ...$ là các công thức,

2) Nếu P, Q là các công thức thì $\overline{P}, P \wedge Q, P \vee Q, P \oplus Q, P \Rightarrow Q, P \Leftrightarrow Q$ là các công thức,

3) Chỉ chấp nhận các công thức được thành lập bằng việc áp dụng một số hữu hạn các quy tắc 1)-2).

1.1.2.2. Định nghĩa: Công thức A gọi là hằng đúng nếu A nhận giá trị 1 với mọi hệ giá trị chân lý có thể có của các biến mệnh đề có mặt trong A.

Công thức A gọi là hằng sai nếu A nhận giá trị 0 với mọi hệ giá trị chân lý có thể có của các biến mệnh đề có mặt trong A. Khi đó ta gọi A là một mâu thuẩn.

Một công thức không phải là hằng đúng, cũng không phải là mâu thuẩn được gọi là tiếp liên.

1.1.2.3. Định nghĩa: Hai công thức A và B được gọi là tương đương lôgic, ký hiệu $A \equiv B$, nếu $A \Leftrightarrow B$ là một hằng đúng. Hệ thức $A \equiv B$ còn được gọi là một đẳng thức.

1.1.2.4. Các tương đương lôgic cơ bản:

1) Luật đồng nhất:

$$p \wedge 1 \equiv p, \quad p \vee 0 \equiv p.$$

2) Luật nuốt:

$$p \wedge 0 \equiv 0, \quad p \vee 1 \equiv 1.$$

3) Luật lũy đẳng:

$$p \wedge p \equiv p, \quad p \vee p \equiv p.$$

4) Luật phủ định kép:
$$\overline{\overline{p}} \equiv p.$$

5) Luật giao hoán:
$$p \wedge q \equiv q \wedge p, \;\; p \vee q \equiv q \vee p.$$

6) Luật kết hợp:
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r), \;\; (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

7) Luật phân phối:
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \;\; p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

8) Luật De Morgan:
$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}, \;\; \overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}.$$

9) Một số tương đương tiện ích:
$$p \wedge \overline{p} \equiv 0, \;\; p \vee \overline{p} \equiv 1,$$
$$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p, \;\; p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), \;\; p \Leftrightarrow q \equiv \overline{p} \Leftrightarrow \overline{q},$$
$$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q),$$
$$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

1.1.3. Suy luận toán học:

1.1.3.1. Suy luận diễn dịch: Suy luận là rút ra một mệnh đề mới từ một hay nhiều mệnh đề đã có.

Phân tích các suy luận trong chứng minh toán học, người ta thấy mỗi chứng minh bao gồm một số hữu hạn bước suy luận đơn giản. Trong mỗi bước suy luận đơn giản đó, ta đã "ngầm" vận dụng một quy tắc suy luận tổng quát để từ các mệnh đề đã được thừa nhận là đúng (tiên đề, định lý, định nghĩa, giả thiết) có thể rút ra một mệnh đề mới. Người ta gọi các mệnh đề xuất phát đã được thừa nhận là đúng là các tiền đề, còn mệnh đề mới được rút ra (nhờ vận dụng các quy tắc suy luận tổng quát) gọi là hệ quả lôgic của các tiền đề. Phép suy luận như thế gọi là suy luận diễn dịch hay gọi tắt là suy diễn.

1.1.3.2. Định nghĩa: Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ là những công thức. Nếu tất cả các hệ giá trị chân lý của các biến mệnh đề có mặt trong các công thức đó làm cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nhận giá trị 1 cũng đồng thời làm cho B nhận giá trị 1, tức là $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ là một công thức hằng đúng, thì ta gọi B là hệ quả lôgic của $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi đó ta cũng nói rằng có một quy tắc suy luận từ các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tới hệ quả lôgic B của chúng.

Quy tắc suy luận đó được ký hiệu là:

$$\frac{A_1, A_1, \ldots, A_n}{B}.$$

1.1.3.3. Một số quy tắc suy luận thường dùng:

1) $\dfrac{p}{p \vee q}$ (Quy tắc cộng).

2) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ (Quy tắc rút gọn).

3) $\dfrac{p, p \Rightarrow q}{q}$ (Quy tắc kết luận - Modus ponens).

4) $\dfrac{p \Rightarrow q, \overline{q}}{\overline{p}}$ (Quy tắc kết luận ngược - Modus tollens).

5) $\dfrac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$ (Quy tắc tam đoạn luận).

6) $\dfrac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q}$ (Quy tắc đưa tương đương vào).

7) $\dfrac{p \vee q, \overline{p}}{q}$ (Quy tắc tách tuyển).

8) $\dfrac{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r}{p \vee q \Rightarrow r}$ (Quy tắc tách tuyển giả thiết).

9) $\dfrac{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r}{p \Rightarrow q \wedge r}$ (Quy tắc hội kết luận).

10) $\dfrac{\overline{q} \Rightarrow \overline{p}}{p \Rightarrow q}$ (Quy tắc phản đảo).

11) $\dfrac{\overline{p} \Rightarrow q, \overline{p} \Rightarrow \overline{q}}{p}$ (Quy tắc phản chứng).

Thí dụ:

1) Cho: Nếu trời mưa (p) thì sân ướt (q) (đúng)
Trời đang mưa (đúng)
Kết luận: Sân ướt (đúng).

2) Cho: Nếu hai góc đối đỉnh (p) thì bằng nhau (q) (đúng)
$\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ không bằng nhau (đúng)
Kết luận: $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ không đối đỉnh (đúng).

3) Cho: Mọi hình vuông đều là hình thoi ($p \Rightarrow q$) (đúng)
Mọi hình thoi có các đường chéo vuông góc ($q \Rightarrow r$) (đúng)
Kết luận: Mọi hình vuông đều có các đường chéo vuông góc ($p \Rightarrow r$) (đúng).

1.1.3.4. Suy luận nghe có lý: Suy luận nghe có lý là suy luận không theo một quy tắc suy luận tổng quát nào để từ những tiền đề đã có, rút ra được một kết luận xác định. Nếu các tiền đề đều đúng thì kết luận rút ra không chắc chắn đúng, mà chỉ có tính chất dự đoán, giả thuyết.

Trong toán học có hai kiểu suy luận nghe có lý thường dùng, đó là

– Phép quy nạp không hoàn toàn,

– Phép tương tự.

Thí dụ: 1) Từ định lý trong hình học phẳng: "Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau", chúng ta nêu ra một "dự đoán": "Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau".

Đây là một thí dụ về phép suy luận bằng tương tự.

2) Các số $2^{2^0}+1,\ 2^{2^1}+1,\ 2^{2^2}+1,\ 2^{2^3}+1,\ 2^{2^4}+1$ là những số nguyên tố. Kết luận: với mọi số tự nhiên n, số $2^{2^n}+1$ là số nguyên tố.

Đây là lối suy luận quy nạp không hoàn toàn đã nêu lên bởi Fermat (1601-1665) sau khi đã kiểm nghiệm với các số $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Nhưng sau đó Euler đã chỉ ra rằng với $n = 5$, khẳng định này không đúng, nghĩa là $2^{2^5}+1$ không là số nguyên tố.

3) $6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 5 + 5,\ 12 = 5 + 7, \ldots$. Kết luận: mọi số nguyên dương chẵn lớn hơn 4 là tổng của hai số nguyên tố.

Mệnh đề này mang tên là bài toán Goldbach. Đây là một trong nhiều khẳng định trong toán học chưa được chứng minh.

4) Phương trình $x^3 + y^3 = z^3$ không có nghiệm nguyên, phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ không có nghiệm nguyên. Kết luận: phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên với mọi số nguyên $n > 2$.

Mệnh đề này được nêu ra bởi Fermat năm 1637, gọi là "định lý cuối cùng của Fermat". Mãi đến tháng 5 năm 1995, mệnh đề này mới được hoàn toàn chứng minh xong bởi nhà toán học người Anh tên là Wiles.

Toán học là khoa học của suy luận diễn dịch. Tất cả các vấn đề trong toán học chỉ được trình bày bằng các suy luận diễn dịch. Tuy nhiên, trong quá trình phát minh, sáng tạo toán học, lý luận diễn dịch gắn chặt với các suy luận nghe có lý. Ta dùng quy nạp không hoàn toàn hay tương tự để nêu ra các giả thuyết. Sau đó mới chứng minh các giả thuyết này bằng diễn dịch.

1.1.4. Các phương pháp chứng minh:

1.1.4.1. Chứng minh là gì? Trong suy luận diễn dịch, nếu từ các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ta rút ra kết luận B bằng cách vận dụng những quy tắc suy luận tổng quát thì ta nói B là kết luận lôgic của các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và suy luận đó là hợp lôgic. Nếu tất cả các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đều đúng thì ta gọi kết luận lôgic B là một kết luận chứng minh và gọi suy luận đó là một chứng minh.