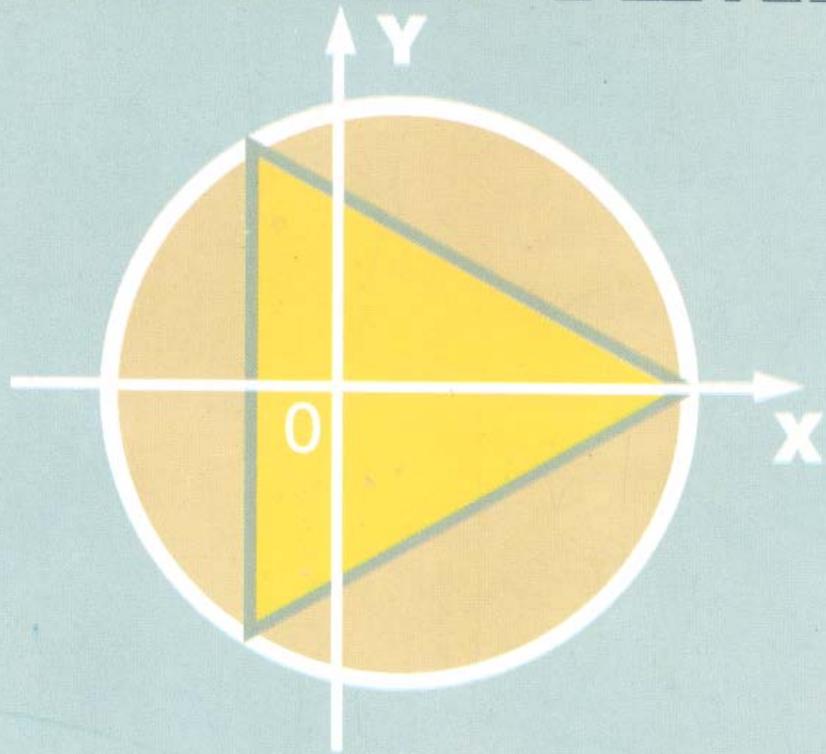


HOÀNG XUÂN SĨNH – TRẦN PHƯƠNG DUNG

BÀI TẬP
ĐẠI SỐ
TUYẾN TÍNH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

HOÀNG XUÂN SÍNH - TRẦN PHƯƠNG DUNG

**BÀI TẬP
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH**

(Tái bản lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục tại TP. Hà Nội

Mọi tổ chức, cá nhân muốn sử dụng tác phẩm dưới mọi hình thức phải được sự đồng ý của chủ sở hữu quyền tác giả.

LỜI MỞ ĐẦU

Học toán đối với học sinh và sinh viên luôn luôn có hai phần : phần lý thuyết và phần bài tập. Phần bài tập có nhiều mục đích : 1) giúp ta nắm vững hơn các khái niệm và định lý đưa ra trong lý thuyết ; 2) tìm đến những kết quả sâu hơn mà lý thuyết không đủ thì giờ để cập tới ; 3) qua việc làm nhiều bài tập, ta nắm được lý thuyết nhuần nhuyễn hơn, để từ đó có nhiều khả năng ứng dụng vào nhiều lãnh vực khác cũng trong toán hay trong những môn khoa học khác... Điều mà sinh viên cần chú ý là phải học lý thuyết cho kỹ trước đã, rồi mới làm bài tập ; thói quen không học hay học qua loa lý thuyết, nhưng đã cắm đầu vào làm bài tập ở trung học, ảnh hưởng không tốt cho việc học toán của sinh viên ở bậc đại học.

Cuốn bài tập này giúp sinh viên làm các bài tập dựa trên cuốn "Toán cao cấp (A₁), Phân đại số tuyến tính", giáo trình dành cho các trường Cao đẳng sư phạm của Nguyễn Duy Thuận. Trong mỗi chương (theo đúng cuốn sách trên), chúng tôi trước hết tóm tắt lý thuyết của chương đó, sau đó giải toàn bộ các bài tập trong chương nhưng bỏ đi những bài tương tự, và bổ sung thêm một số bài tập để đáp ứng yêu cầu đề ra ở trên. Cuốn sách này giúp các sinh viên học môn Đại số tuyến tính ở bậc cao đẳng, đại học, và cũng giúp cho sinh viên chuẩn bị thi vào bậc sau đại học, chứ không thuần túy cho sinh viên học Cao đẳng Sư phạm.

Chúng tôi xin nhắc lại điều đã nói ở trên : muốn làm bài tập tốt, trước hết sinh viên phải nắm kỹ lý thuyết đã, và cuốn bài tập chỉ giúp sinh viên khởi động thôi, khi bộ não đã chạy tốt rồi thì hãy gấp sách lại và bắt trí não làm việc độc lập. Chúc các bạn làm bài tốt.

Hà Nội, ngày 14 tháng 8 năm 1999

Các tác giả :

HOÀNG XUÂN SĨNH VÀ TRẦN PHƯƠNG DUNG

Chương 0

SƠ LƯỢC VỀ KHÁI NIỆM NHÓM, VÀNH, TRƯỜNG

§1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Có thể nói từ tiểu học đến trung học, người ta làm toán chủ yếu trên những số. Có những tính chất đặc biệt quan trọng như tính giao hoán, tính kết hợp của phép cộng và phép nhân những số đã được dạy từ những năm đầu của tiểu học, vì các tính chất đó làm cho việc tính toán đơn giản hơn nhiều. Sau này khi làm toán ở bậc đại học, người ta làm toán trên những đối tượng không phải là số nữa, nhưng người ta lại gặp lại những tính chất đã thấy trong phép cộng hay phép nhân những số, và chính do các tính chất gặp lại đó người ta đã thấy rằng điều gì mà phép cộng hay phép nhân những số có thì cũng xảy ra đối với những đối tượng đang xét. Từ đó mới hình thành khái niệm *cấu trúc đại số* trong toán của thế kỷ 20. Chẳng hạn, ta xét một tập hợp trên đó có một phép toán, mà ta đặt tên là “phép cộng” tuy tập hợp đó chẳng có liên quan gì đến các con số cả ; nếu phép cộng đang xét có tính chất kết hợp thì ta bảo tập hợp cùng với phép cộng đó lập thành một cấu trúc đại số mà dưới đây ta sẽ thấy nó được gọi là nửa nhóm, nếu nó có thêm tính giao hoán thì ta bảo ta có một nửa nhóm giao hoán.

Để cho tiện việc ký hiệu, các phép toán trên một tập hợp được ký hiệu bằng dấu + (lúc đó gọi là phép cộng) hay bằng dấu \times (lúc đó gọi là phép nhân) thường được thay bằng dấu $,$, mà sau đó người ta bỏ đi ; chẳng hạn $a \times b$ được viết là $a . b$ và cuối cùng là ab , như thế nhanh gọn.

1.1. Định nghĩa nửa nhóm

Giả sử X là một tập hợp có một phép toán ký hiệu nhân.

X cùng với phép nhân là một *nửa nhóm* nếu phép nhân có tính kết hợp, nghĩa là $x(yz) = (xy)z$, với mọi $x, y, z \in X$.

Nếu phép nhân còn có tính chất giao hoán, nghĩa là $xy = yx$, với mọi $x, y \in X$, thì X là một *nửa nhóm giao hoán*.

Nửa nhóm X gọi là một *vị nhóm* nếu có một phần tử $e \in X$ sao cho $ex = xe = x$, với mọi $x \in X$. Ta gọi e là *phần tử đơn vị* của *vị nhóm*. Nếu phép toán có thêm tính chất giao hoán, ta có một *vị nhóm giao hoán*.

1.2. Định nghĩa nhóm

Một *vị nhóm* X gọi là một *nhóm* nếu với mọi phần tử $x \in X$, tồn tại một phần tử $x' \in X$ sao cho $x'x = xx' = e$ (người ta chứng minh được rằng x' là duy nhất và ký hiệu nó bằng x^{-1} , gọi là *nghịch đảo* của x). Nhóm X gọi là *aben* hay *giao hoán* nếu phép toán có thêm tính giao hoán.

Nếu phép toán của nhóm X được ký hiệu bằng dấu cộng, thì phần tử e không gọi là phần tử đơn vị nữa, mà gọi là *phần tử không* và ký hiệu là 0 (tương tự như ký hiệu của số 0); và phần tử nghịch đảo của một phần tử x sẽ gọi là *đối* của x và ký hiệu là $-x$.

1.3. Định nghĩa vành

Giả sử X là một tập hợp có hai phép toán cộng và nhân.

X cùng với hai phép toán đó là một *vành* nếu :

1) X cùng với phép cộng là một nhóm giao hoán ;

2) X cùng với phép nhân là một nửa nhóm ;

3) phép nhân phân phối đối với phép cộng, nghĩa là :

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(y + z)x = yx + zx$$

với mọi $x, y, z \in X$.

Nếu phép nhân có thêm tính chất giao hoán thì ta bảo X là một *vành giao hoán*. Nếu phép nhân có phần tử đơn vị thì ta bảo X là một *vành có*

đơn vị. Nếu phép nhân vừa giao hoán vừa có đơn vị thì ta bảo X là một *vành giao hoán có đơn vị*.

1.4. Định nghĩa trường

Giả sử X là một tập hợp có hai phép toán cộng và nhân.

X cùng với hai phép toán đó là một *trường* nếu :

- 1) X là một *vành giao hoán có đơn vị* ;
- 2) mọi $x \neq 0$ thuộc X có nghịch đảo, nghĩa là nếu ta đặt $X' = X - \{0\}$ thì X' là một nhom giao hoán đối với phép nhân.

§2. BÀI TẬP

1. Xét tập hợp các số phức

$$C = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

với phép cộng

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i,$$

và phép nhân

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Bây giờ ta hãy chứng minh C cùng với hai phép toán trên là một trường. Trước hết ta nhận xét các số thực a là những số phức có phần ảo bằng 0 : $a = a + 0i$, và để cộng hay nhân hai số phức với nhau ta cứ làm bình thường như đối với các biểu thức đại số chứa i, nhưng chú ý là $i^2 = -1$, và trong kết quả cuối cùng nhớ nhom phần thực với nhau cũng như nhom phần ảo với nhau. Để chứng minh loại bài tập kiểu như thế này, ta hãy viết ra trên nháp định nghĩa một trường và cố gắng viết không cần nhìn vào sách. Sau đó ta lần lượt chứng minh các tính chất của trường được thỏa mãn đối với đối tượng đang xét. Ta có với các số phức :

$$\begin{aligned} 1) & (a_1 + b_1i) + ((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)) = \\ & = (a_1 + b_1i) + ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) = (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3))i = \\ & = ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + a_3 + b_3i = \\ & = ((a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)) + a_3 + b_3i. \text{ Phép cộng kết hợp.} \end{aligned}$$

$$2) (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i =$$

$$= (a_1 + a_1) + (b_2 + b_1)i = (a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i). \text{ Phép cộng giao hoán.}$$

3) $0 + (a + bi) = (0 + a) + bi = a + bi$. Phần tử không của phép cộng là số 0.

4) Với mọi số phức $a + bi$, số phức $-a - bi$ là đối của nó vì

$$(a + bi) + (-a - bi) = a - a + (b - b)i = 0 + 0i = 0.$$

$$5) (a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i)(a_3 + b_3i)) =$$

$$= (a_1 + b_1i)(a_2a_3 - b_2b_3 + (a_2b_3 + b_2a_3)i) =$$

$$= a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3) + (a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3))i =$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3 + ((a_1b_2 + b_1a_2)a_3 + (a_1a_2 - b_1b_2)b_3)i =$$

$$= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i)(a_3 + b_3i) =$$

$$= ((a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i))(a_3 + b_3i). \text{ Phép nhân kết hợp.}$$

$$6) (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i =$$

$$= a_2a_1 - b_2b_1 + (a_2b_1 + b_2a_1)i = (a_2 + b_2i)(a_1 + b_1i). \text{ Phép nhân giao hoán.}$$

$$7) 1.(a + bi) = a + bi. \text{ Phần tử đơn vị của phép nhân là số 1.}$$

8) Giả sử $a + bi \neq 0 = 0 + 0i$ là một số phức khác 0, điều đó có nghĩa a và b không đồng thời bằng 0 hay $a^2 + b^2 \neq 0$. Xét số phức

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i,$$

ta có

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right)(a + bi) =$$

$$= \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right)i = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + 0i = 1.$$

Vậy mỗi số phức khác 0 có nghịch đảo.

9) Xét $(a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i))$ và $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i)$. Ta có :

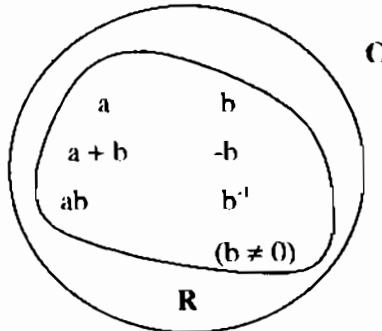
$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i)((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) = \\ & = a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3) + (a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))i; \\ & (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i) = \\ & = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i + a_1a_3 - b_1b_3 + (a_1b_3 + b_1a_3)i = \\ & = a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3 + (a_1b_2 + b_1a_2 + a_1b_3 + b_1a_3)i. \end{aligned}$$

Số sánh các kết quả đạt được ta có phép nhân phân phối đối với phép cộng.

Kết luận : C với hai phép toán cộng và nhân như trên là một trường.

Nhận xét : 1) Khi chứng minh C là một trường, ta đã sử dụng các tính chất của phép cộng và phép nhân các số thực : kết hợp, giao hoán, có phần tử không, có phần tử đối, có phần tử đơn vị, mọi số thực $\neq 0$ có nghịch đảo và phép nhân phân phối đối với phép cộng, nghĩa là R là một trường ;

2) Ta có hình vẽ dưới đây sau khi làm kỹ bài tập trên :



và người ta nói rằng R là một trường con của C, tương tự ta có Q là một trường con của R ;

3) Sở dĩ một bài tập kiểu này phải làm tỉ mỉ như vậy, vì sinh viên mới vào đại học rất bỡ ngỡ khi gặp loại bài tập như thế này.

2. Thực hiện các phép tính :

a) $(-8 + i) - (2 - 7i) = -10 + 8i$.

b) $i - (5 + 2i) = -5 - i.$

c) $\left(\frac{1}{2} - 3i\right) - \left(3 + \frac{1}{4}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{13}{4}i.$

d) $(\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} - i\sqrt{2}) = \sqrt{6} - \sqrt{2} - (2 + \sqrt{3})i.$

e) $(\sqrt{k} + i\sqrt{h})(\sqrt{k} - i\sqrt{h}) = k + h.$

3. Phân tích các tổng sau thành tích của hai thừa số phức liên hợp :

a) $16 + a^2 = (4 + ai)(4 - ai) = (a + 4i)(a - 4i).$

b) ($a > 0$) $a + 1 = (\sqrt{a} + i)(\sqrt{a} - i) = (1 + \sqrt{a}i)(1 - \sqrt{a}i).$

4. Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{4}{1-2i} = \frac{4(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{4+8i}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i.$

b) $\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2i\sqrt{3}} = \frac{(-2\sqrt{3}+i)(1-2i\sqrt{3})}{(1+2i\sqrt{3})(1-2i\sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+(1+12)i}{1+12} = i.$

Ta có thể thấy ngay kết quả khi nhận xét : $-2\sqrt{3}+i = i(1+2\sqrt{3}i).$

5. Tính các lũy thừa :

a) Vì $i^2 = -1$ và $i^4 = 1$, nên : $(-i)^{21} = (-i)^{20+1} = (-i)^{20}(-i) = -i$; $(-i)^{36} = 1$;
 $i^{15} = i^{12}i^3 = -i$; $i^{10} = i^8i^2 = -1$.

b) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(-1+3i\sqrt{3}+9-3i\sqrt{3}) = 1.$

Ta có thể thấy ngay kết quả khi chuyển sang dạng lượng giác :

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$