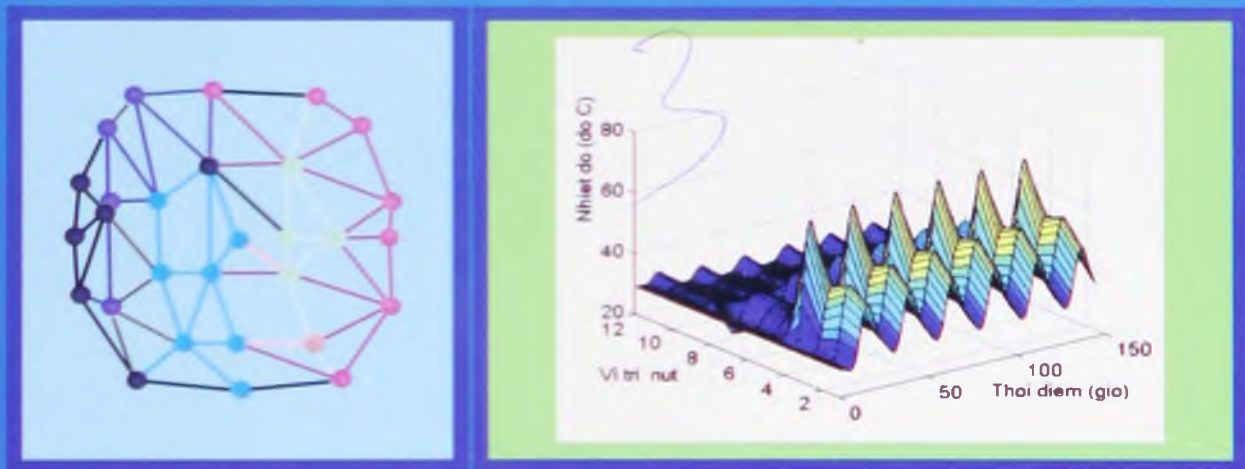


Trịnh Văn Quang

Cơ sở Phương pháp Phần tử Hữu hạn trong Truyền nhiệt



NHÀ XUẤT BẢN THẾ GIỚI

**CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP
PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG TRUYỀN NHIỆT**

TÁC GIẢ

PGS.TS. Trịnh Văn Quang

Nhà xuất bản Thế Giới

– 2013 –

LỜI NÓI ĐẦU

Qua nhiều năm giảng dạy Lý thuyết Truyền nhiệt cho Chương trình Cao học Cơ khí cũng như tham gia và hướng dẫn các đề tài khoa học, chúng tôi nhận thấy một tài liệu về phương pháp tính nhiệt mới là hết sức cần thiết để phục vụ cho công tác giảng dạy và nghiên cứu. Cuốn sách “*Cơ sở phương pháp Phần tử hữu hạn trong Truyền nhiệt*” được biên soạn nhằm đáp ứng phần nào yêu cầu trên.

Môn học Cơ sở truyền nhiệt trong chương trình đại học của các nước tiên tiến hiện nay chỉ mới dùng ở phương pháp Sai phân hữu hạn, còn phương pháp Phần tử hữu hạn (PTHH) chưa được đề cập đến. Vì thế, trong tính nhiệt, phương pháp PTHH còn là mới. Trên cơ sở một số bài giảng cho chương trình cao học ngành cơ khí, qua kinh nghiệm sử dụng phương pháp số trong các đề tài nghiên cứu giải các bài toán nhiệt thực tế, cũng như tham khảo các tài liệu trong và ngoài nước, chúng tôi biên soạn cuốn “*Cơ sở phương pháp PTHH trong Truyền nhiệt*”.

Cuốn sách bao gồm 5 chương: Chương 1 trình bày khái quát về các phương thức truyền nhiệt và tóm tắt các kết quả giải bài toán dẫn nhiệt bằng phương pháp giải tích; Chương 2 nêu các khái niệm cơ bản về các loại PTHH và các đại lượng đặc trưng của chúng; Chương 3 đề cập đến phương pháp thiết lập phương trình ma trận đặc trưng của PTHH trong dẫn nhiệt ổn định. Đây là phần lý thuyết toán quan trọng nhất trong phương pháp PTHH để tính nhiệt; Chương 4 đi vào giải một số bài toán dẫn nhiệt ổn định bằng phương pháp PTHH; Chương 5 thiết lập phương trình đặc trưng trong dẫn nhiệt không ổn định, các cách rời rạc theo thời gian của bài toán, từ đó giải một số bài toán dẫn nhiệt không ổn định bằng phương pháp PTHH.

Cuốn sách có thể được tham khảo làm tài liệu giảng dạy cho chương trình cao học ngành cơ khí, động lực, chương trình đại học chuyên ngành nhiệt – lạnh, năng lượng và cũng có thể phục vụ cho công tác nghiên cứu về nhiệt trong các lĩnh vực xây dựng công trình, luyện kim...

Với suy nghĩ viết sách sao cho bạn đọc sử dụng được thuận tiện nhất, chúng tôi cố gắng trình bày các vấn đề một cách chi tiết để bạn đọc có thể dễ dàng theo dõi và từ đó vận dụng trong nghiên cứu các bài toán thực tế. Hy vọng rằng cuốn sách sẽ hữu ích và thiết thực với bạn đọc.

Mặc dù rất cẩn trọng trong quá trình biên soạn, nhưng chắc rằng cuốn sách vẫn còn có những khiếm khuyết, chúng tôi rất mong nhận được góp ý của bạn đọc và đồng nghiệp. Mọi đóng góp xin gửi về Bộ môn Kỹ thuật nhiệt, Khoa Cơ khí, Trường Đại học GTVT Hà Nội hoặc địa chỉ quangnhiyet@yahoo.com.vn.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn!

TÁC GIẢ

PGS.TS. Trịnh Văn Quang

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU.....	3
CHƯƠNG 1 MỞ ĐẦU	
1.1. Khái quát.....	7
1.2. Phương trình vi phân dẫn nhiệt và điều kiện đơn trị.....	10
1.3. Điềm qua một số bài toán dẫn nhiệt cơ bản.....	13
1.4. Các khó khăn của phương pháp giải tích.....	25
1.5. Tóm tắt chương.....	25
CHƯƠNG 2 PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	
2.1. Giới thiệu khái quát.....	26
2.2. Phần tử một chiều bậc nhất.....	30
2.3. Phần tử một chiều bậc hai.....	33
2.4. Phần tử hai chiều tam giác bậc nhất.....	38
2.5. Tọa độ khu vực đối với phần tử tam giác bậc nhất.....	44
2.6. Các phần tử tam giác bậc hai, bậc ba.....	46
2.7. Phần tử hai chiều chữ nhật bậc nhất.....	50
2.8. Các phần tử ba chiều.....	54
2.9. Phần tử đẳng tham số, phần tử quy chiếu.....	60
2.10. Tóm tắt chương.....	74
BÀI TẬP CHƯƠNG 2.....	75
CHƯƠNG 3 THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG CỦA PHẦN TỬ HỮU HẠN	
3.1. Phương pháp thiết lập phương trình đặc trưng của phần tử.....	77
3.2. Phương pháp biến phân, phương trình Euler - Lagrange.....	91
3.3. Thiết lập phương trình đặc trưng của phương trình vi phân dẫn nhiệt theo phương pháp biến phân.....	101
3.4. Thiết lập phương trình đặc trưng của phương trình vi phân dẫn nhiệt theo phương pháp Galerkin.....	109
3.5. Xác định phiếm hàm bài toán dẫn nhiệt qua cánh.....	112
3.6. Tóm tắt chương.....	114

CHƯƠNG 4	GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN NHIỆT ỒN ĐỊNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	
4.1.	Dẫn nhiệt qua vách phẳng một lớp.....	115
4.2.	Dẫn nhiệt qua vách phẳng nhiều lớp.....	118
4.3.	Dẫn nhiệt qua vách phẳng có nguồn nhiệt bên trong.....	120
4.4.	Dẫn nhiệt qua vách trụ.....	130
4.5.	Dẫn nhiệt qua vách trụ có nguồn bên trong.....	137
4.6.	Dẫn nhiệt qua thanh có tiết diện không đổi.....	143
4.7.	Dẫn nhiệt qua cánh có tiết diện thay đổi.....	149
4.8.	Dẫn nhiệt hai chiều qua phần tử tam giác đơn.....	154
4.9.	Dẫn nhiệt qua phần tử tam giác lắp ghép.....	158
4.10.	Dẫn nhiệt hai chiều qua phần tử chữ nhật đơn.....	173
4.11.	Dẫn nhiệt hai chiều qua phần tử chữ nhật lắp ghép.....	179
4.12.	Bài toán dẫn nhiệt ba chiều.....	190
4.13.	Các bài toán hình khối có trục đối xứng.....	191
4.14.	Tóm tắt chương.....	194
BÀI TẬP CHƯƠNG 4		195
CHƯƠNG 5	DẪN NHIỆT KHÔNG ỒN ĐỊNH	
5.1.	Khái niệm.....	199
5.2.	Phương pháp Galerkin.....	200
5.3.	Phương pháp biến phân.....	202
5.4.	Rời rạc theo thời gian.....	204
5.5.	Rời rạc theo thời gian bằng phương pháp sai phân hữu hạn.....	207
5.6.	Rời rạc theo thời gian bằng phương pháp phần tử hữu hạn.....	210
5.7.	Tổng kết một số công thức rời rạc theo thời gian.....	214
5.8.	Dẫn nhiệt không ổn định qua vách phẳng.....	215
5.9.	Dẫn nhiệt không ổn định qua thanh.....	218
5.10.	Dẫn nhiệt không ổn định qua vách trụ.....	222
5.11.	Dẫn nhiệt không ổn định qua phần tử tam giác.....	226
5.12.	Dẫn nhiệt không ổn định qua phần tử chữ nhật.....	241
5.13.	Tóm tắt chương.....	259
BÀI TẬP CHƯƠNG 5		260
HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP		263
TÀI LIỆU THAM KHẢO		337

Chương 1

MỞ ĐẦU

1.1. KHÁI QUÁT

1.1.1. Vai trò của truyền nhiệt trong kỹ thuật và tự nhiên

Truyền nhiệt là quá trình truyền năng lượng dưới dạng nhiệt giữa các vật thể hoặc giữa các khu vực khác nhau trong vật thể. Có thể gặp hiện tượng nhiệt ở khắp nơi, từ các việc trong đời sống hàng ngày như đun nấu, làm mát hay sưởi ấm không khí trong phòng... đến các hiện tượng trong tự nhiên như nắng, mưa, giông bão đều gắn với các quá trình nhiệt nói chung và truyền nhiệt nói riêng. Trong hầu hết các quá trình công nghệ, từ hoạt động của các loại động cơ nhiệt như động cơ đốt trong, động cơ tua bin, động cơ phản lực... đến làm mát động cơ điện, làm mát các bộ phận của các thiết bị điện tử, luôn có mặt quá trình truyền nhiệt. Bởi vậy, có thể nói hiện tượng nhiệt nói chung và truyền nhiệt nói riêng có vai trò rất quan trọng trong đời sống, kỹ thuật và trong tự nhiên.

Trong kỹ thuật thường nảy sinh vấn đề là làm sao không chế được nhiệt độ làm việc cục đại của thiết bị để bảo đảm hoạt động bình thường của thiết bị, hoặc không chế được độ chênh nhiệt độ cục bộ trong các khu vực của vật thể để bảo đảm biến dạng nhiệt cục bộ trong giới hạn cho phép không gây nên rạn nứt phá hủy vật thể. Điều đó chỉ có thể thực hiện được khi kiểm soát được quá trình truyền nhiệt của thiết bị và vật thể.

1.1.2. Các phương thức truyền nhiệt, các định luật truyền nhiệt cơ bản

Nhiệt có thể truyền từ nơi này tới nơi khác theo các phương thức khác nhau. Mỗi phương thức truyền nhiệt có những đặc điểm và cơ cấu riêng. Có ba phương thức truyền nhiệt cơ bản là dẫn nhiệt, toả nhiệt đối lưu, bức xạ nhiệt.

a. Dẫn nhiệt

Dẫn nhiệt xảy ra bên trong vật thể hoặc giữa các vật thể tiếp xúc nhau khi giữa chúng có sự chênh lệch nhiệt độ. Dẫn nhiệt được thực hiện thông qua quá trình truyền dao động của các phân tử vi mô cấu tạo nên vật thể. Quá trình dẫn nhiệt có thể xảy ra trong chất rắn, chất lỏng và cả trong chất khí. Trong kim loại, dẫn nhiệt được thực hiện chủ yếu nhờ quá trình truyền dao động của các điện tử tự do. Trong chất điện môi, dẫn nhiệt xảy ra nhờ sóng đàn hồi truyền dao động nhiệt. Trong chất lỏng và chất khí, dẫn nhiệt được thực hiện nhờ quá trình khuếch tán các phân tử.

Lượng nhiệt truyền qua một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian được gọi là mật độ dòng nhiệt, ký hiệu là q (W/m^2). Mật độ dòng nhiệt truyền đi do dẫn nhiệt tuân theo Định luật Fourier:

$$\vec{q} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.1)$$

Trong đó: \vec{q} là véc tơ mật độ dòng nhiệt; k là hệ số dẫn nhiệt (W/mK); $\partial T/\partial n$ là gradient nhiệt độ với n là pháp tuyến mặt đẳng nhiệt.

Hệ số dẫn nhiệt là đại lượng đặc trưng khả năng dẫn nhiệt của vật liệu. Trị số hệ số dẫn nhiệt của một số vật liệu điển hình như sau:

Vật liệu	Hệ số dẫn nhiệt (W/mK)
Kim loại	
Bạc nguyên chất	410
Đồng nguyên chất	385
Nhôm nguyên chất	200
Sắt nguyên chất	73
Hợp kim	
Thép không gỉ	16
Nhôm hợp kim	168
Phi kim loại	
Nhựa	0,6
Gỗ	0,2
Chất lỏng	
Nước	0,6
Chất khí	
Không khí khô	0,025

b. Toả nhiệt đối lưu

Toả nhiệt đối lưu là phương thức truyền nhiệt xảy ra giữa bề mặt vật rắn và chất lỏng hoặc khí, khi giữa chúng có chênh lệch nhiệt độ và tiếp xúc với nhau. Do các phần tử chất lỏng tiếp xúc với bề mặt vật rắn trao đổi nhiệt với bề mặt vật bằng dẫn nhiệt, lớp chất lỏng sát bề mặt vật thay đổi nhiệt độ và mật độ làm xuất hiện chuyển động tạo thành dòng đối lưu, đồng thời mang nhiệt đi. Chuyển động đó được gọi là đối lưu tự nhiên. Chuyển động của chất lỏng do tác động của các lực cơ học từ bên ngoài như bơm, quạt, khuấy... được gọi là đối lưu cưỡng bức. Toả nhiệt đối lưu cũng xảy ra rất mạnh trong các quá trình chất lỏng sôi hay ngưng tụ.

Mật độ dòng nhiệt truyền đi bằng toả nhiệt đối lưu tuân theo định luật Newton - Richman:

$$q = h.(T_w - T_a) \quad (1.2)$$

Ở đây, q (W/m^2), là mật độ dòng nhiệt, h là hệ số toả nhiệt đối lưu (W/m^2K); T_w và T_a tương ứng là nhiệt độ bề mặt và nhiệt độ môi trường chất lỏng.

Trị số hệ số toả nhiệt điển hình trong các chất lỏng như sau:

Chất lỏng	Hệ số toả nhiệt (W/m ² K)
Các chất khí (lồng lò)	15
Các chất khí (chày)	15 – 250
Các chất lỏng (lồng lò)	100
Các chất lỏng (chày)	100 – 200
Các chất lỏng khi sôi	2000 – 35.000
Các chất lỏng khi ngưng	2000 – 25.000

c. Bức xạ nhiệt

Bức xạ nhiệt là quá trình truyền nhiệt bằng sóng điện từ giữa các vật thể. Mọi vật thể được cấu tạo bởi các thành phần vi mô mang điện, luôn ở trạng thái chuyển động nên tạo ra sóng điện từ, lan truyền trong không gian gọi là bức xạ điện từ. Khi đập vào bề mặt vật thể khác, một phần bức xạ điện từ bị vật đó hấp thụ biến thành nhiệt. Quá trình truyền năng lượng nhiệt bằng sóng điện từ đó được gọi là trao đổi nhiệt bức xạ. Mọi vật luôn tồn tại ở nhiệt độ $T > 0K$, nên luôn phát ra bức xạ nhiệt và đồng thời cũng hấp thụ các tia bức xạ nhiệt từ các vật khác chiếu tới, bởi vậy quá trình trao đổi nhiệt bức xạ là quá trình hai chiều, nhưng vật có nhiệt độ cao hơn năng lượng bị mất đi bởi bức xạ ra sẽ lớn hơn năng lượng nhận được bởi hấp thụ. Khi các vật có nhiệt độ bằng nhau, quá trình trao đổi nhiệt bức xạ giữa chúng vẫn xảy ra nhưng ở thể cân bằng động, tức là ở mỗi vật có năng lượng bức xạ ra bằng năng lượng hấp thụ vào nên năng lượng và nhiệt độ của vật đó không thay đổi.

Năng lượng truyền đi bằng bức xạ từ bề mặt vật đen tuân theo định luật Stefan Boltzomann:

$$E_0 = \sigma_0 T^4 \quad (1.3)$$

Ở đây, E_0 là năng suất bức xạ của vật đen, (W/m²); σ_0 là hằng số Stefan Boltzomann $\sigma_0 = 5,669.10^{-8}$ (W/m²K⁴); T là nhiệt độ tuyệt đối (K).

Năng lượng bức xạ từ bề mặt các vật xám nhỏ hơn năng lượng bức xạ từ bề mặt vật đen, xác định bởi:

$$E = \epsilon \sigma_0 T^4 \quad (1.4)$$

Ở đây, E là năng suất bức xạ của vật xám, (W/m²); ϵ là hằng số phát xạ của vật xám, còn gọi là độ đen.

Lượng nhiệt trao đổi bằng bức xạ giữa hai bề mặt 1 và 2 được xác định bởi:

$$Q = F_{\epsilon} F_G \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.5)$$

F_{ϵ} là yếu tố kể đến bản chất của hai bề mặt, F_G là yếu tố kể đến định hướng hình học của hai bề mặt bức xạ.

1.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DẪN NHIỆT VÀ ĐIỀU KIỆN ĐƠN TRỊ

1.2.1. Phương trình vi phân dẫn nhiệt

Để xác định nhiệt độ trong vật thể cần phải thiết lập mối quan hệ của nhiệt độ với các tọa độ và thời gian, đó chính là phương trình vi phân dẫn nhiệt.

Tách một phân tử hình hộp ra khỏi vật thể đặt trong tọa độ xyz . Phân tử có kích thước $dx dy dz$, Hình 1.1.

Khảo sát dẫn nhiệt qua phân tử theo các hướng x, y, z sau thời gian $d\tau$:

Theo hướng x :

Lượng nhiệt vào phân tử qua mặt thứ nhất:

$$dQ_{x1} = q_x dy dz d\tau \quad (1.6)$$

Lượng nhiệt ra khỏi phân tử qua mặt thứ hai:

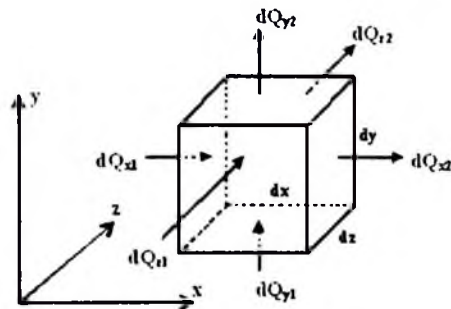
$$dQ_{x2} = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy dz d\tau \quad (1.7)$$

Lượng nhiệt phân tử nhận được theo hướng x :

$$dQ_x = dQ_{x1} - dQ_{x2} \quad (1.8)$$

Với $q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x}$ sẽ có:

$$dQ_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau \quad (1.9)$$



Hình 1.1. Phân tử thể tích trong tọa độ x, y, z

Tương tự như vậy theo hướng y và theo hướng z, phân tử nhận được:

$$dQ_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau \quad (1.10)$$

$$dQ_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau \quad (1.11)$$

Theo cả ba hướng x, y, z lượng nhiệt phân tử nhận được là:

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau \quad (1.12)$$

Hệ số dẫn nhiệt trong phương trình trên là một véc tơ. Trong trường hợp tổng quát hệ số dẫn nhiệt có thể là một ten sơ:

$$k = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Nếu bên trong vật thể có nguồn sinh nhiệt q_v (W/m^3), lượng nhiệt do nguồn trong sinh ra trong phân tử khảo sát sau thời gian $d\tau$ là:

$$q_v dx dy dz \cdot d\tau \quad (1.14)$$

Lượng nhiệt phân tử nhận do dẫn nhiệt và nguồn nhiệt bên trong sinh ra sau thời gian $d\tau$ là:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v \right] dx dy dz \cdot d\tau \quad (1.15)$$

Do nhận lượng nhiệt trên, nội năng phân tử sau thời gian $d\tau$ sẽ thay đổi là:

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau \quad (1.16)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng thì tổng năng lượng phân tử nhận được do dẫn nhiệt theo ba hướng và do nguồn nhiệt trong sinh ra sẽ bằng biến đổi nội năng của phân tử:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = \rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.17)$$

Phương trình (1.17) được gọi là phương trình vi phân dẫn nhiệt.

Nếu vật liệu là đẳng hướng, nghĩa là hệ số dẫn nhiệt k là không đổi theo các hướng, phương trình vi phân dẫn nhiệt được viết thành:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho} \quad (1.18)$$