TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÁI NGUYÊN
**KHOA TOÁN**

**CHANTHONE KEOMANISAY**

# VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH CHUNG NHAU MỘT HÀM NHỎ

**Chuyên ngành: Toán giải tích**
**Mã số: 60.46.01.02**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2017**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÁI NGUYÊN
**KHOA TOÁN**

**CHANTHONE KEOMANISAY**

# VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH CHUNG NHAU MỘT HÀM NHỎ

**Chuyên ngành: Toán giải tích**
**Mã số: 60.46.01.02**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

Người hướng dẫn khoa học:
**PGS.TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG**

**THÁI NGUYÊN - 2017**

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng bản luận văn này là sự nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Hà Trần Phương. Các kết quả chính trong luận văn chưa từng được công bố trong các luận văn thạc sĩ của các tác giả khác ở Việt Nam.

*Học viên*

**Chanthone Keomanisay**

**Xác nhận**
**của trưởng khoa Toán**

**Xác nhận**
**của người hướng dẫn khoa học**

**PGS.TS. Hà Trần Phương**

# Lời cảm ơn

Để hoàn thành bản luận văn này tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Hà Trần Phương, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn tới PGS.TS. Hà Trần Phương - người đã tận tình dìu dắt tôi từ những bước chập những đầu tiên trên con đường nghiên cứu khoa học với tất cả niềm say mê khoa học và tâm huyết của người thầy.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Phòng Đào tạo (bộ phân quản lý Đào tạo Sau đại học) thuộc Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện cho tôi về tài liệu và thủ tục hành chính để tôi hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo khoa Toán - Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Viện Toán học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã tận tình giảng dạy, trang bị cho tôi những kiến thức cơ sở trên con đường nghiên cứu khoa học.

Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến các bạn trong lớp Cao học Toán K23, đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn.

Cuối cùng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình của mình. Những người luôn động viên chia sẻ khó khăn và luôn mong mỏi tôi thành công.

Bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 3 năm 2017

**Tác giả luận văn**

**Chanthone Keomanisay**

# Mục lục

# MỞ ĐẦU

Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của lý thuyết Nevanlinna là nghiên cứu vấn đề duy nhất của các hàm phân hình. Năm 1926, R. Nevanlinna được chứng tỏ hai hàm phân hình chung nhau 5 giá trị riêng biệt không kể bội thì sẽ trùng nhau. Công trình này của Ông được xem là khởi nguồn cho các nghiên cứu về vấn đề duy nhất của hàm phân hình. Về sau, việc phát triển các nghiên cứu theo hướng này thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước: F Gross, H. Yi , H. Fujimoto, L. Smiley, H. H. Khoai, G. Dethloff, C. C. Yang, M. Ru và nhiều nhà toán học khác. Chẳng hạn, Năm 1982, F.Gross và C.C. Yang đã chỉ ra tập hợp $T = \{z \in \mathbb{C} | e^z + z = 0\}$ là tập xác định duy nhất kể cả bội cho các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$, tức là với hai hàm nguyên $f$ và $g$, điều kiện $E_f(T) = E_g(T)$ kéo theo $f \equiv g$. Chú ý, tập $T$ xác định như trên chứa vô số phần tử. Năm 1995, H.Yi đã xét tập hợp $S_Y = \{z \in \mathbb{C} | z^n + az^m + b = 0\}$, trong đó $n \geq 15, n > m \geq 5$, $a, b$ là các hằng số khác không sao cho $z^n + az^m + b = 0$ không có nghiệm bội và Ông đã chứng minh $S_Y$ là tập xác định duy nhất cho các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$. Năm 1998, G.Frank và M.Reinders chỉ ra một ví dụ về tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$.

Năm 1967, W. K. Hayman ([5]) đã đặt ra giả thuyết *nếu một hàm nguyên $f$ thỏa mãn $f^n f' \neq 1$ với mọi giá trị nguyên dương $n$ thì là hàm hằng.* Khi nghiên cứu giả thuyết này, năm 1997, C. C. Yang và C. Z. Hua ([10]) đã chứng minh một định lý về vấn đề duy nhất cho hàm phân hình khi hai đa thức chứa đạo hàm bậc nhất chung nhau một giá trị. Từ đó đến nay những vấn đề nghiên cứu theo hướng này được phát triển mạnh mẽ bởi các công trình của nhiều tác giả trong và ngoài nước như: X. Y. Zhang, J. F. Chen, W. C. Lin ([12]), K. Boussaf,

A. Escassut và J. Ojeda ([1]), R. S. Dyavanal ([2]), N. V. Thin và H.T Phuong ([9]),....

Với mong muốn tìm hiểu vấn đề hàm phân hình được xác định một cách duy nhất bởi điều kiện đại số của đa thức chứa đạo hàm, chúng tôi chọn đề tài **"Vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình chung nhau một hàm nhỏ"**. Mục đích chính của luận văn là trình bày lại một số kết quả đã được chứng minh bởi N. V. Thin và H.T Phuong ([9]) và một số kết quả khác. Luận văn gồm có hai chương như sau:

Chương 1: Kiến thức cơ sở chuẩn bị. Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna cho các hàm phân hình và một số khái niệm và kết quả sử dụng trong Chương 2.

Chương 2: Vấn đề duy nhất của hàm phân hình khi đa thức chứa đạo hàm chung nhau một hàm nhỏ. Đây là chương chính của luận văn, chúng tôi trình bày lại một số kết quả nguyên cứu của N. V. Thin và H.T Phuong ([9]) và một số kết quả của các tác giả khác đã công bố trong thời gian gần đây.

# Chương 1

# Kiến thức cơ sở chuẩn bị

## 1.1. Hai định lý cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna

### 1.1.1. Các hàm Nevanlinna và tính chất

Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm thường được sử dụng trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna.

**Định nghĩa 1.1.** Cho hàm chỉnh hình $f$ trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được gọi là không điểm bội $k \in \mathbb{N}^*$ của hàm $f(z)$ nếu tồn tại một hàm chỉnh hình $h(z)$ không triệt tiêu trong lân cận $U$ của $z_0$ sao cho trong lân cận đó hàm $f$ được biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z).$$

Nghĩa là $f^{(n)}(z_0) = 0$, với mỗi $n = 1, ..., k-1$ và $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Điểm $z_0$ được gọi là cực điểm bội $k \in \mathbb{N}^*$ của hàm $f(z)$ nếu nó là không điểm bội $k$ của hàm $\dfrac{1}{f(z)}$.

Với mỗi số thực $x > 0$, kí hiệu:

$$\log^+ x = \max\{\log x, 0\}.$$

Khi đó $\log x = \log^+ x - \log^+(1/x)$.

Cho $f$ là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, $r > 0$, với mỗi $\varphi \in [0; 2\pi]$, ta có

$$\log|f(re^{i\varphi})| = \log^+|f(re^{i\varphi})| - \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right|,$$

nên

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right|d\varphi.$$

**Định nghĩa 1.2.** Hàm

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm $f$.

Bây giờ ta định nghĩa các hàm đếm. Cho $f$ là hàm phân hình và $r > 0$. Kí hiệu $n(r, 1/f)$ là số không điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, 1/f)$ là số không điểm không kể bội của $f$, $n(r, f)$ là số cực điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, f)$ là số cực điểm không kể bội của $f$ trong $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant |r|\}$.

**Định nghĩa 1.3.** Hàm

$$N(r,\infty;f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t}dt + n(0,f)\log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* của $f$ (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm). Hàm

$$\overline{N}(r,\infty;f) = \overline{N}(r,f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t,f) - \overline{n}(0,f)}{t}dt + \overline{n}(0,f)\log r$$

được gọi là *hàm đếm không kể bội*. Trong đó

$$n(0,f) = \lim_{t\to 0} n(t,f),\ \overline{n}(0,f) = \lim_{t\to 0}\overline{n}(t,f).$$

**Định nghĩa 1.4.** Hàm

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$$

gọi là *hàm đặc trưng* của hàm $f$.

Các hàm đặc trưng $T(r,f)$, hàm xấp xỉ $m(r,f)$ và hàm đếm $N(r,f)$ là ba hàm cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị, nó còn gọi là các hàm Nevanlinna. Định lý sau đây cho thấy một số tính chất của các hàm này.

**Định lý 1.1.** *Cho các hàm phân hình $f_1, f_2, \cdots, f_p$, khi đó:*

$$(1)\qquad m(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} m(r, f_\nu) + \log p;$$

$$(2)\qquad m(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} m(r, f_\nu);$$

$$(3)\qquad N(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} N(r, f_\nu);$$

$$(4)\qquad N(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} N(r, f_\nu);$$

$$(5)\qquad T(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu) + \log p;$$

$$(6)\qquad T(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu).$$

Việc chứng minh các tính chất này là đơn giản, ta chỉ cần dựa theo tính chất : nếu $a_1, \ldots, a_p$ là các số phức phân biệt thì

$$\log^+ \left| \prod_{\nu=1}^{p} a_\nu \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} \log^+ |a_\nu|$$

và

$$\log^+ \left| \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu \right| \leqslant \log^+ (p \max_{\nu=1,\ldots,p} |a_\nu|) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} \log^+ |a_\nu| + \log p.$$

### 1.1.2. Hai định lý cơ bản

Trong phần này chúng tôi trình bày hai định lý cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna, trước hết là công thức Poisson - Jensen.