ỄN QUỐC THẮNG

CƠ SỞ LÝ THUYẾT SỐ

TRƯỜNG ĐỊA PHƯƠNG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

NGUYỄN QUỐC THẮNG

CƠ SỞ LÝ THUYẾT SỐ
TRƯỜNG ĐỊA PHƯƠNG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI – 2010

Lời nói đầu

Lý thuyết Số (hay Số học, theo cách gọi thông thường) là một trong những ngành Toán học lâu đời nhất. Ngoài những ứng dụng thông thường nhất trong đời sống ví dụ như nó cho ta cách cân, đong, đo, đếm các đối tượng bằng cách dùng các con số cụ thể từ thời cổ đại, gần đây Lý thuyết Số càng có nhiều ứng dụng đẹp đẽ trong rất nhiều lĩnh vực của đời sống, ví dụ như các ứng dụng khác nhau trong các lĩnh vực của Khoa học và Công nghệ, đặc biệt là Đại số, Giải tích Toán học (Giải tích cổ điển hay Giải tích hiện đại), Cơ sở Toán học của Tin học, Lý thuyết Xấp xỉ và tính toán gần đúng (Giải tích Số), Lý thuyết Mã sửa sai, Mật mã, Mã với khoá công khai, v.v...

Ngay từ thủa bình minh của Toán học, bằng những bài toán, vấn đề cụ thể của mình, Lý thuyết Số đã kích thích sự phát triển của các ngành Toán học khác nhau. Và ngược lại, các ngành Toán học khác cũng có ảnh hưởng ngược lại đối với sự phát triển của Lý thuyết Số, trong đó chúng tôi đặc biệt nhấn mạnh đến vai trò của Đại số.

Mục tiêu của bộ sách này là trình bày cơ sở Lý thuyết đại số của Số học. Các kết quả được trình bày đều là các kết quả kinh điển của Lý thuyết Số, nhưng cách trình bày là theo cách mà tác giả nhận thấy rằng có ích. Đó là do chúng tôi muốn nhấn mạnh đến vai trò của Đại số, nên các cấu trúc đại số liên quan đến nền tảng của Lý thuyết Số là trọng tâm chính của cuốn sách này. Đây cũng chính là sự khác biệt của cuốn sách này so với các cuốn sách khác với cùng một chủ đề mà bạn đọc có thể tham khảo thêm trong danh mục tài liệu tham khảo. Ngoài ra, chúng tôi có đưa thêm vào một số khái niệm tương đối hiện đại, tuy đơn giản nhưng rất quan trọng trong việc lĩnh hội các lý thuyết hiện đại tiếp theo của Lý thuyết Số và Hình học Đại số hiện đại, như lý thuyết vành và định giá Hensel, v.v...

Nội dung của cuốn sách dựa trên các bài giảng của tác giả dành cho học viên Cao học tại Khoa Toán - Cơ -Tin, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội, tại Khoa Toán, Trường Đại học Sư Phạm, Đại học Thái Nguyên và tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam trong vòng gần 10 năm trở lại đây. Trong cuốn sách đầu tiên này tác giả trình bày các vấn đề và phương pháp liên quan đến cách tiếp cận địa phương, cụ thể liên quan đến định giá. Vì môn học Lý thuyết Trường và Lý thuyết Galoa đã trở nên những môn học không thể thiếu trong Chương trình Đại số Đại cương ở bậc Đại học và ở bậc Sau Đại học, nên để lĩnh hội tốt cuốn sách này, bạn đọc (nếu chưa có dịp làm quen) nên tham khảo các giáo trình đã có về Lý thuyết Trường và Lý thuyết Galoa để nắm bắt các phương pháp, kết quả chính. Để góp phần tạo điều kiện dễ dàng hơn cho bạn đọc, tác giả trình bày ở trong phần phụ lục một số khái niệm, kết quả quan trọng của Lý thuyết Trường, Lý thuyết Galoa và Tôpô được sử dụng trong cuốn sách này.

Nội dung của cuốn sách gồm có bảy chương. Sau mỗi phần đều có một số bài tập nhằm giúp cho bạn đọc hoặc hiểu thêm phần lý thuyết đã được trình bày, hoặc để lĩnh hội thêm một số sự kiện mà do khuôn khổ cuốn sách có hạn, tác giả không có dịp trình bày.

Tác giả chân thành gửi lời cảm ơn tới các cơ quan đã nói ở trên đã tạo điều kiện cho tác giả được trình bày các bài giảng của mình, tới các học viên Cao học đã kiên nhẫn lắng nghe và góp ý cho tác giả trong quá trình giảng bài, tới các bạn đồng nghiệp đã góp ý kiến xây dựng, đặc biệt tới GS. TSKH Hà Huy Khoái, GS. TSKH Ngô Việt Trung và GS.TSKH Lê Tuấn Hoa đã quan tâm giúp đỡ tác giả trong nhiều năm qua. Tác giả chân thành cảm ơn Quỹ NAFOSTED đã tài trợ một phần cho công trình này và Nhà Xuất bản đã tạo điều kiện để cuốn sách có thể sớm đến tay bạn đọc. Mặc dù đã rất cố gắng, song cuốn sách chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả xin trân trọng tiếp thu các ý kiến đóng góp của bạn đọc cũng như các bạn đồng nghiệp để cuốn sách phục vụ bạn đọc đuược tốt hơn.

Thư góp ý xin gửi về Nhà Xuất bản, hoặc gửi trực tiếp cho tác giả (địa chỉ e-mail: nqthang@math.ac.vn).

Hà Nội, mùa Giáng Sinh 2009.

Tác giả

Mục lục

CHƯƠNG I
Giá trị tuyệt đối. Một số khái niệm cơ bản

Giới thiệu. Chương này trình bày một số khái niệm cơ bản liên quan đến giá trị tuyệt đối, bao đầy đủ của trường, và các định lý cơ bản liên quan. Trong toàn bộ cuốn sách này, nếu k là một trường con của trường K, ta nói K là trường mở rộng của k và viết $k \subset K$. Chú ý rằng ở đây, bao hàm thức nói chung không chặt. Trong toàn bộ cuốn sách **Z**, **Q**, **R**, **C** lần lượt ký hiệu vành các số nguyên, trường số hữu tỷ, trường số thực, trường số phức. Ta ký hiệu tập tất cả các số thực không âm (tương ứng dương) là $\mathbf{R}_{\geq 0}$ (tương ứng $\mathbf{R}_{>0}$). Nếu k là trường, thì ký hiệu k^* (tương ứng k^+) là nhóm nhân (tương ứng nhóm cộng) của k.

1.1. Định nghĩa

Cho k là một trường. Một *giá trị tuyệt đối* trên k là một hàm số $|.| : k \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ từ k vào tập tất cả các số thực không âm thoả mãn các tiên đề (1) - (3) sau đây:

(1) $|x| \geq 0, \forall x \in k$; $|x| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;
(2) $|xy| = |x||y|, \forall x, y \in k$;
(3) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in k$.

Nhóm $|k^*| \subset \mathbf{R}_{>0}$ được gọi là *nhóm các giá trị của* $|.|$.
Chú ý. Thông thường người ta ký hiệu $|.|$ là một giá trị tuyệt đối, song đôi khi cũng dùng ký hiệu chữ $v, w, \ldots$.
Nếu xét điều kiện sau :
(3') $|x + y| \leq Max(|x|, |y|), \forall x, y \in k$,
thì rõ ràng do (3') $\Rightarrow$ (3), hàm $|\cdot| : k \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ thoả mãn các điều kiện (1), (2) và (3') cũng là một giá trị tuyệt đối và được gọi là *giá trị tuyệt đối phi Acsimet*, nghĩa là giá trị tuyệt đối không thoả mãn tiên đề sau của Acsimet (Arkhimedes - ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ):

(A) *Nếu C là số thực dương tuỳ ý thì tồn tại số tự nhiên n sao cho* $|n.1| > C$.

Ví dụ. Cho $k = \mathbf{Q}$ (tương ứng $k = \mathbf{R}, \mathbf{C}$) là trường số hữu tỷ (tương ứng số thực, số phức). Khi đó giá trị tuyệt đối thông thường trên k (hay chuẩn của số phức, nếu $k = \mathbf{C}$) là một giá trị tuyệt đối (Acsimet , vì nó thỏa mãn tiên đề A).

Giả sử giá trị tuyệt đối $|.| : k \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ thoả mãn điều kiện $|x| = 1$ với mọi $x \in k^* := k \setminus \{0\}$. Khi đó giá trị tuyệt đối $|.|$ được gọi là *giá trị tuyệt đối tầm thường* và giá trị tuyệt đối này có thể xác định trên mọi trường. Rõ ràng đây cũng là giá trị tuyệt đối phi Acsimet .

Ví dụ. Cho $k = \mathbf{Q}$, p là một số nguyên tố. Với $x \in \mathbf{Q}$ tuỳ ý, ta có thể viết $x = p^{\alpha}r/s$ một cách duy nhất với $\alpha, r, s \in \mathbf{Z}$, $s \neq 0$, r/s là tối giản và $(p, rs) = 1$. Ta ký hiệu $v_p(x) := \alpha$ và định nghĩa *chuẩn p-adic của x* bởi

$$|x|_p := (1/p)^{v_p(x)} = (1/p)^{\alpha}.$$

Khi đó $|.|_p$ là một giá trị tuyệt đối phi ácsimét trên $\mathbf{Q}$. Ta cũng ký hiệu $|.|_\infty$ là giá trị tuyệt đối thông thường trên $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$.

1.2. Một số tính chất và định lý cơ bản

Mệnh đề sau cho ta một số tính chất đơn giản của giá trị tuyệt đối, mà chứng minh đọc như một bài tập đầu tiên trong lý thuyết giá trị tuyệt đối.

1.2.1. Mệnh đề. *Cho $|.|$ là một giá trị tuyệt đối trên trường k. Khi đó ta có*

1) $|1| = |-1| = 1$;
2) $|x| = |-x|$ *với mọi* $x \in k$;
3) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$, *với mọi* $x \in k^*$;
4) $||x| - |y|| \leq |x - y|$, *với mọi* $x, y \in k$;
5) *Hàm số* $d(x, y) := |x - y|$, *với mọi* $x, y \in k$, *xác định một mêtric trên k;*
6) *Trường hữu hạn chỉ có một giá trị tuyệt đối duy nhất là giá trị tuyệt đối tầm thường.*

■

Định nghĩa. Giả sử $|.|$ là một giá trị tuyệt đối trên k. Mêtric d ở mệnh đề trên xác định một tôpô trên k, được gọi là *tôpô xác định bởi giá trị tuyệt đối* $|.|$. Trên các tập con của k ta xét tôpô cảm sinh và ký hiệu $B_a(x)$ (tương ứng $B'_a(x)$) là hình cầu mở (tương ứng đóng) tâm x bán kính $a > 0$.

Định nghĩa. Hai giá trị tuyệt đối $|.|$ và $|.|'$ trên k được gọi là *tương đương* nếu tôpô mà chúng xác định trên k là tương đương. Khi đó ta viết $|.| \sim |.|'$.