CK.0000071025

XUÂN SÍNH

ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG

UYÊN
IỆU

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HOÀNG XUÂN SÍNH

ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG

(Tái bản lần thứ mười bốn)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:

Phó Tổng biên tập NGÔ ÁNH TUYẾT

Giám đốc Công ty CP Sách ĐH–DN NGÔ THỊ THANH BÌNH

Biên tập lần đầu và tái bản: TRẦN PHƯƠNG DUNG

Biên tập kĩ thuật: BÙI CHÍ HIẾU

Sửa bản in: HOÀNG DIỄM

Chế bản: PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC VIỆT NAM)

LỜI NÓI ĐẦU

Cho xuất bản lần thứ nhất

Tập II hầu như độc lập đối với tập I, nếu không kể đến một số khái niệm như hoán vị, phép thế, ma trận..., mà một đôi khi đề cập đến. Tuy vậy, về mặt ngôn ngữ và kí hiệu của lí thuyết tập hợp, tập II trung thành với tập I.

Ở đây chúng tôi không làm việc thuyết minh từng chương, các bạn đọc có thể xem bản thuyết minh chương trình Đại số cao cấp của Bộ Giáo dục. Sau mỗi § của từng chương, bạn đọc có những bài tập để, hoặc hiểu sâu lí thuyết hơn và rèn luyện kĩ năng tính toán, hoặc hiểu rộng lí thuyết hơn, với một số khái niệm mới đưa vào trong bài tập. Mỗi vấn đề được nhắc lại thì được chú thích chương, tiết, mục của vấn đề đã được đưa vào, chẳng hạn ch V, §3, 2 có nghĩa là vấn đề đó đã nói đến ở chương V, tiết 3, mục 2. Nếu vấn đề được nhắc lại cùng chương với vấn đề đang xét thì chỉ chú thích tiết và mục ; nếu lại cùng tiết thì chỉ chú thích mục. Trong cùng một tiết, các định nghĩa, bổ đề, định lí được đánh số bằng 1, 2, 3...

Cuối cùng để xây dựng một giáo trình Đại số cao cấp càng ngày càng tốt hơn, chúng tôi rất mong bạn đọc vui lòng chỉ bảo những thiếu sót hẳn không tránh khỏi của cuốn sách này. Xin cảm ơn PTS Bùi Huy Hiền ở tổ Đại số của khoa Toán trường Đại học sư phạm Hà Nội 2 đã có nhiều đóng góp về phần Bài tập.

Hà Nội ngày 13-1-1972

HOÀNG XUÂN SÍNH

LỜI NÓI ĐẦU

Cho xuất bản lần thứ hai

Tuy nhiều lần Nhà xuất bản Giáo dục đề nghị chúng tôi cho tái bản cuốn sách Đại số cao cấp tập II, nhưng chúng tôi đã từ chối vì đã có cuốn Đại số và Số học của giáo sư Ngô Thúc Lanh. Nhưng trong quá trình dạy học, chúng tôi thấy cuốn Đại số cao cấp tập II được sinh viên các trường Đại học Sư phạm dùng để ôn thi, còn sinh viên các trường Cao đẳng Sư phạm lại dùng như tài liệu chính khóa, cho nên chúng tôi nhận lời với Nhà xuất bản Giáo dục cho in lại cuốn sách này.

Trong cuốn sách tái bản chúng tôi đã làm các việc sau :

1) Chữa lại một số chứng minh hay phát biểu định lí cho ngắn gọn hơn, hay không thừa.

2) Cho thêm §3 trong chương I, nói sơ lược về các tiên đề của lí thuyết tập hợp, một điều cần thiết cho người giảng và cũng cần thiết cho sinh viên có trí tò mò khoa học.

3) Thêm ví dụ, bài tập về vành chính và vành Ơclit, hai loại vành đóng vai trò quan trọng trong Số học.

Chúng tôi trân trọng cám ơn các bạn đồng nghiệp đã có những ý kiến đóng góp và Nhà xuất bản Giáo dục đã nhiều lần đề nghị cho tái bản.

Hà Nội, ngày 21-12-1994

HOÀNG XUÂN SÍNH

CHƯƠNG I

TẬP HỢP VÀ QUAN HỆ

§1. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

1. Khái niệm tập hợp

Những vật, những đối tượng toán học... được tụ tập do một tính chất chung nào đó thành lập những *tập hợp*. Đây không phải là một định nghĩa mà là một hình ảnh trực quan của khái niệm tập hợp. Lí thuyết tập hợp trình bày ở đây là một lí thuyết sơ cấp theo quan điểm ngây thơ.

Người ta nói : Tập hợp các học sinh trong một lớp, tập hợp các lớp trong một trường, tập hợp **N** các số tự nhiên, tập hợp **Z** các số nguyên, tập hợp **Q** các số hữu tỉ, tập hợp **R** các số thực, tập hợp **C** các số phức...

Các vật trong tập hợp X gọi là các *phần tử* của X. Kí hiệu $x \in X$ đọc là "x là một phần tử của X" hoặc "x thuộc X". Phủ định của $x \in X$ kí hiệu là $x \notin X$.

Ta bảo *hai tập hợp A và B là bằng nhau* và viết là $A = B$ khi và chỉ khi mọi phần tử thuộc A thì thuộc B và đảo lại, nghĩa là các quan hệ $x \in A$ và $x \in B$ là tương đương. Như vậy $A = B$ khi và chỉ khi chúng chứa các phần tử y như nhau.

2. Bộ phận của một tập hợp

Định nghĩa 1. *Giả sử A và B là hai tập hợp. Ta kí hiệu $A \subset B$ quan hệ sau đây*

với mọi x, $x \in A$ kéo theo $x \in B$.

Nói một cách khác, quan hệ $A \subset B$ có nghĩa là mọi phần tử của A đều thuộc B.

Quan hệ $A \subset B$ là *quan hệ bao hàm*, đọc là "A chứa trong B", hoặc "B chứa A", hoặc "A là một bộ phận của B", hoặc "A là một tập hợp con của B" và người ta cũng viết $B \supset A$. Phủ định của $A \subset B$ viết là $A \not\subset B$ hay $B \not\supset A$.

Định lí 1. *Quan hệ bao hàm có các tính chất sau :*

(i) *Các quan hệ $A \subset B$ và $B \subset C$ kéo theo quan hệ $A \subset C$.*

(ii) *Muốn có $A = B$ cần và đủ có $A \subset B$ và $B \subset A$.*

Chứng minh. (i) Ta hãy lấy một phần tử tùy ý $x \in A$. Vì $A \subset B$ nên $x \in B$. Nhưng $B \subset C$ nên $x \in C$. Vậy với mọi x, $x \in A$ kéo theo $x \in C$, tức là $A \subset C$.

(ii) Hiển nhiên. ■

Thường một bộ phận A của một tập hợp B được xác định bởi một tính chất $\mathcal{T}$ nào đó, mà mọi phần tử của tập hợp B thỏa mãn tính chất $\mathcal{T}$ sẽ là phần tử của tập hợp A. Ta kí hiệu như sau

$$A = \{ x \in B \mid x \text{ có tính chất } \mathcal{T} \},$$

và đọc là : "A là tập hợp tất cả các phần tử $x \in B$ mà x có tính chất $\mathcal{T}$".

Ví dụ. – Xét tập hợp $\mathbf{Z}$ các số nguyên và bộ phận A các số nguyên chẵn, ta viết

$$A = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 2 \}.$$

3. Hiệu của hai tập hợp

Định nghĩa 2. Cho hai tập hợp A và B tùy ý, tập hợp

$$A - B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$$

gọi là *hiệu của tập hợp A và tập hợp B*. Nếu $B \subset A$ thì hiệu $A - B$ gọi là *phần bù của tập hợp B trong tập hợp A* và còn kí hiệu là $\mathbf{C}_A B$.

Định lí 2. *Giả sử A và B là những bộ phận của một tập hợp X, thế thì*

(i) $X - (X - A) = A$.

(ii) *Các quan hệ* $A \subset B$ *và* $X - B \subset X - A$ *là tương đương.*

Chứng minh. (i) Tập hợp $X - (X - A)$ gồm các phần tử $x \in X$ sao cho $x \notin X - A$, tức là gồm các phần tử $x \in X$ sao cho $x \in A$.

(ii) Giả sử $A \subset B$. Vì quan hệ $x \in A$ kéo theo quan hệ $x \in B$, nên quan hệ $x \notin B$ kéo theo $x \notin A$, tức là quan hệ $x \in X - B$ kéo theo quan hệ $x \in X - A$. Đảo lại giả sử $X - B \subset X - A$. Thế thì bằng lí luận tương tự như trên ta có $X - (X - A) \subset X - (X - B)$, tức là theo (i), $A \subset B$. ■

4. Tập hợp rỗng

Giả sử X là một tập hợp. X cũng là một bộ phận của X, điều đó cho phép ta xét tập hợp $\varnothing = X - X$ gọi là bộ phận rỗng của X. $x \in \varnothing$ có nghĩa là $x \in X$ và $x \notin X$. Rõ ràng không có một phần tử x nào của X lại có tính chất đó.

Tập hợp $X - X = \varnothing$ không phụ thuộc vào tập hợp X. Nói cách khác, ta có

$$X - X = Y - Y \text{ với mọi } X, Y$$

Thực vậy, ta có thể coi $X - X$ và $Y - Y$ chứa các phần tử y như nhau vì chúng chẳng có phần tử nào cả (xin đừng coi đây là một chứng minh).

Tập hợp $X - X = \varnothing$ không phụ thuộc vào tập hợp X, vì lí do đó, ta gọi nó là *tập hợp rỗng*. Tập hợp này không có một phần tử nào cả.

Rõ ràng ta có $\varnothing \subset X$ với mọi tập hợp X và tính chất này đặc trưng tập hợp rỗng.

5. Tập hợp một, hai phần tử

Giả sử x là một vật. Thế thì có một tập hợp kí hiệu $\{x\}$ chỉ gồm có một phần tử là x. Một tập hợp thuộc loại đó gọi là *tập hợp một phần tử*.

Bây giờ giả sử x và y là hai vật phân biệt. Thế thì có một tập hợp kí hiệu $\{x, y\}$ chỉ gồm có hai phần tử là x và y. Một tập hợp thuộc loại đó gọi là *tập hợp hai phần tử*.

Người ta cũng định nghĩa như vậy tập hợp ba bốn... phần tử. Các tập hợp đó cùng với tập hợp rỗng gọi là *các tập hợp hữu hạn*, còn các tập hợp khác gọi là *các tập hợp vô hạn*.

6. Tập hợp các bộ phận của một tập hợp

Giả sử X là một tập hợp, các bộ phận của X lập thành một tập hợp kí hiệu $\mathcal{P}(X)$ và gọi là *tập hợp các bộ phận của X*. Tập hợp này bao giờ cũng có ít nhất một phần tử, đó là X.

Ta có thể chứng minh được rằng, nếu X là một tập hợp hữu hạn gồm n phần tử thì $\mathcal{P}(X)$ là một tập hợp hữu hạn gồm 2^n phần tử. Như vậy các tập hợp $\varnothing$, $\mathcal{P}(\varnothing)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))))$... theo thứ tự có 0, 1, 2, $2^2 = 4$, $2^4 = 16$, $2^{16} = 65536$... phần tử. Từ tập hợp $\varnothing$ chúng ta đã thành lập những tập hợp có nhiều phần tử đến mức trong thực tế ta không đếm được.

7. Tích đề các của hai tập hợp

Giả sử x và y là hai vật, từ hai vật này ta thành lập một vật thứ ba kí hiệu (x, y) và gọi là *cặp* (x, y). Hai cặp (x, y) và (u, v) là bằng nhau khi và chỉ khi $x = u$ và $y = v$. Đặc biệt ta có $(x, y) = (y, x)$ khi và chỉ khi $x = y$, điều này nói lên thứ tự mà ta viết hai vật của một cặp là cần thiết.

Ta có thể mở rộng khái niệm cặp như sau. Giả sử cho ba vật x, y, z, ta đặt

$$(x, y, z) = ((x, y), z)$$

và gọi (x, y, z) là một *bộ ba*. Muốn có

$$(x', y', z') = (x'', y'', z'')$$

cần và đủ là

$$x' = x'', \; y' = y'', \; z' = z''.$$