ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO THỊ THANH THUỶ

LÝ THUYẾT NEVANLINNA VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2007

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO THỊ THANH THUỶ

LÝ THUYẾT NEVANLINNA VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành : GIẢI TÍCH
Mã số : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học : GS.TSKH.HÀ HUY KHOÁI

THÁI NGUYÊN - 2007

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

MỤC LỤC

trang

Mở đầu 1
Chương 1 . **Kiến thức cơ sở 3**
1.1 . Trường định chuẩn không Acsimet 3
1.2 . Trường số p - adic 4
1.3. Hàm chỉnh hình trên trường không Acsimet 7
Chương 2 . **Lý thuyết Nevanlinna trên trường p - adic ……..……...14**
2.1 . Các hàm đặc trưng Nevanlinna 14
2.2 . Các định lý cơ bản về phân phối giá trị hàm phân hình 20
2.3 . Tập xác định duy nhất các hàm phân hình 25
Chương 3 . **Phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ trong trường p - adic.....30**
Kết luận 54
Tài liệu tham khảo 55

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

MỞ ĐẦU

Luận văn trình bày một số kết quả cơ bản của Lý thuyết Nevanlinna và ứng dụng của nó đối với phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ trong trường p - adic .

Nội dung luận văn gồm ba chương .

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về trường định chuẩn không Acsimet , trường số p - adic , và một số tính chất đặc biệt về hàm phân hình trên trường không Acsimet áp dụng cho chương sau .

Chương 2: Nêu định nghĩa , một số tính chất về các hàm đặc trưng Nevanlinna , hai định lý cơ bản của lý thuyết Nevanlinna và một số kết quả về bài toán xác định tập duy nhất của hàm phân hình trên trường p - adic .

Chương 3: Trình bày một số kết quả về phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ trong trường p - adic .

Kết quả của luận văn :

Cho P , Q là các đa thức thuộc $K[x]$ với $P'Q' \neq 0$. Xét hai hàm phân biệt f , g giải tích hoặc phân hình trong đĩa $|x-a| < r$ (tương ứng trong K), thoả mãn $P(f) = Q(g)$. Sử dụng lý thuyết phân phối giá trị hàm phân hình Nevanlinna , đưa ra các điều kiện đủ về các không điểm của P', Q' để f và g bị chặn trong đĩa $|x-a| < r$ (hoặc tương ứng là hằng số) .

Trường hợp đặc biệt khi $\deg P = 4$, xét trường hợp riêng $Q = \lambda P$ $(\lambda \in K)$ và đưa ra một số điều kiện đặc trưng cho sự tồn tại của hai hàm phân biệt khác hằng f , g phân hình trong K thoả mãn $P(f) = \lambda P(g)$.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS . TSKH Hà Huy Khoái . Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và thành kính nhất đến Thầy , Thầy không chỉ hướng dẫn tôi nghiên cứu khoa học mà Thầy

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

còn thông cảm tạo mọi điều kiện động viên tôi trong suốt quá trình làm luận văn .

Tôi xin chân thành cảm ơn khoa Toán , khoa sau Đại học trường đại học sư phạm Thái Nguyên , Viện toán học Việt Nam đã giúp đỡ và tạo điều kiện để tôi hoàn thành luận văn này .

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn ban giám hiệu trường CĐCN Việt Đức , đặc biệt là các đồng nghiệp trong khoa KHCB , gia đình và bạn bè tôi đã hết sức quan tâm và giúp đỡ tôi trong thời gian học và hoàn thành luận văn .

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót . Rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên , tháng 8 năm 2007

Học viên

Đào Thị Thanh Thuỷ

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Chương 1

Kiến thức cơ sở

1.1.Trường định chuẩn không Acsimet.

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử K là trường , chuẩn trên K là hàm

$$|\ .\ | : K \to R_+ \text{ thoả mãn :}$$

i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $|xy| = |x|\ |y|,\ \forall\ x, y \in K,$

iii) $|x+y| \le |x| + |y|,\ \ \forall x, y \in K.$

Chuẩn $|\ .\ |$ được gọi là chuẩn không Acsimet nếu thoả mãn điều kiện

iv) $|x+y| \le max\ \{|x|\ ,\ |y|\},\ \ \forall x, y \in K.$

Một chuẩn $|\ .\ |$ trên K cảm sinh một hàm khoảng cách d được định nghĩa bởi

$$d(x,y) = |x-y|\ ,\ \forall x, y \in K.$$

Nếu chuẩn $|\ .\ |$ là không Acsimet thì mêtric cảm sinh d thoả mãn:

$$d(x,y) \le max\ \{d(x,z)\ ,\ d(z,y)\},\ \forall x, y\ ,z \in K.$$

mêtric ứng với chuẩn không Acsimet được gọi là siêu mêtric.

Ví dụ 1.1.2. Xét hàm

$$|\ .\ | : K \to R_+$$

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} 1 & nếu\ \ x \ne 0 \\ 0 & nếu\ \ x = 0. \end{cases}$$

Khi đó , $|\ .\ |$ là một chuẩn không Acsimet trên K và mêtric cảm sinh

$$d :\ K \times K \to R_+$$

$$(x,y) \mapsto d(x,y) = \begin{cases} 1 & nếu\ \ x \ne y \\ 0 & nếu\ \ x = y. \end{cases}$$

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

là một siêu mêtric. Mêtric này được gọi là mêtric tầm thường .

Ta xét một số đặc trưng của tôpô sinh bởi chuẩn không Acsimet thông qua các hình cầu như sau:

Với $r \in R_+$ ta định nghĩa hình cầu mở , đóng tâm a , bán kính r là :

$$K(a;r) = \{ x \in K \mid d(x,a) < r \}$$

$$K[a;r] = \{ x \in K \mid d(x,a) \leq r \}$$

Mênh đề 1.1.3. *Giả sử K là trường định chuẩn không Acsimet . Ta có* :

i) *Nếu* $b \in K(a;r)$ *thì* $K(a;r) = K(b;r)$

ii) *Hình cầu* $K(a;r)$ *là tập mở và cũng là tập đóng.*

iii) *Hai hình cầu mở* (*hình cầu đóng*) *hoặc rời nhau hoặc chứa nhau.*

Trường số *p* - adic1. 2.

Với $p \in Z$, p là số nguyên tố thì mọi số nguyên $a \neq 0$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$a = p^{\nu} a'$, với p không chia hết a' , $a' \in Z \setminus \{ 0 \}$.

Kí hiệu : $\nu = \nu_p(a)$. Vậy ta có hàm :

$$\nu_p : Z \setminus \{ 0 \} \mapsto N$$

$$a \mapsto \nu_p(a).$$

Ta mở rộng hàm ν với $x = \frac{a}{b} \in Q$ như sau . Đặt :

$$\nu_p(x) = \begin{cases} \nu_p(a) - \nu_p(b), \text{nếu } x \neq 0 \\ +\infty, \text{ nếu } x = 0 \end{cases}$$

Với mỗi số nguyên p , xét

$$\nu_p : Q \mapsto R \cup +\{\infty\}$$

$$x \mapsto |x|_p = \frac{1}{p^{\nu}} \quad , \text{ với } \nu = \nu_p(x).$$

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Khi đó , $|\ .\ |_p$ là một chuẩn không Acsimet trên Q và được gọi là chuẩn p - adic.

Mệnh đề 1.2.1(**Ostrowski**). *Mọi chuẩn không tầm thường trên Q đều tương đương với một trong hai chuẩn sau :*

1) Chuẩn p - adic , với p là số nguyên tố;

2) Giá trị tuyệt đối thông thường.

Như vậy ta có hai hướng làm đầy trường các số hữu tỷ Q.

+ Làm đầy theo giá trị tuyệt đối thông thường ta thu được trường các số thực R

+ Làm đầy theo chuẩn p - adic ta thu được trường các số p - adic.

Cụ thể là , chúng ta có thể xây dựng Q_p đầy đủ hoá của Q theo chuẩn $|\ .\ |_p$ như sau .

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy theo $|\ .\ |_p$ nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in N$ sao cho $\forall\, m$, $n > n_0$ thì $|x_m - x_n|_p < \varepsilon$. Hai dãy Cauchy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$được gọi là tương đương nếu $|x_n - y_n|_p \to 0$. Với $\{x_n\}$ là dãy Cauchy theo $|\ .\ |_p$, ta kí hiệu $\overline{\{x_n\}}$ là tập các dãy Cauchy tương đương với $\{x_n\}$. Đặt Q_p là tập tất cả các lớp tương đương theo chuẩn $|\ .\ |_p$.

Trên Q_p trang bị các phép toán như sau.

Với $\overline{\{x_n\}}$, $\overline{\{y_n\}} \in Q_p$, ta định nghĩa:

$$\overline{\{x_n\}} + \overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n + y_n\}}\ ;\quad \overline{\{x_n\}}\,.\overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n.y_n\}}\ .$$

Ta thấy định nghĩa trên không phụ thuộc vào phần tử đại diện của lớp tương đương . Khi đó , Q_p là một trường và là trường định chuẩn với chuẩn $|\ .\ |_p$.

Định nghĩa 1.2.2. *Với $\lambda \in Q_p$ và $\{x_n\} \in Q$ sao cho $\overline{\{x_n\}} = \lambda$ thì ta xác định :*

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

$$|\lambda|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p.$$

Chú ý rằng định nghĩa trên xác định theo tính chất sau của chuẩn p - adic.

Mệnh đề 1.2.3. *Q_p là đầy đủ hoá của Q theo chuẩn $|\ .\ |_p$ và tập giá trị của Q và Q_p theo $|\ .\ |_p$ là trùng nhau , đó là tập $\{p^n, n \in Z\} \cup \{0\}$.*

Tương tự như quá trình đầy đủ hoá Q theo $|\ .\ |_\infty$, ta nhận được một trường Q_p đầy đủ nhưng không đóng đại số . Người ta đã giải quyết vấn đề này bằng một mở rộng trường như sau

Xét mở rộng chuẩn tắc $Q_p \subset K$ và nhóm Galois $G(K/Q_p)$. Đặt:

$$N_{K/Q_p} : K \to Q_p$$

$$\alpha \mapsto N_{K/Q_p}(\alpha) = \prod_{\sigma \in G(K/Q_P)} \sigma(\alpha),$$

với σ là tự đẳng cấu trên K giữ nguyên các phần tử của Q_p . Chú ý rằng nếu bậc của mở rộng trường $[K : Q_P] = n$ thì $N_{K/Q_p}(\alpha) = \alpha^n$, $\forall \alpha \in Q_p$.

Mệnh đề 1.2.4. *Giả sử K/Q_p là mở rộng chuẩn tắc bậc n . Khi đó tồn tại duy nhất một chuẩn không Acsimet $|\ .\ |$ trên K mở rộng chuẩn p - adic trên và được xác định như sau* :

$$|x| = \sqrt[n]{|N_{K/Q_p}(x)|_p},$$

và trường K đầy đủ với chuẩn $|\ .\ |$.

Đặt $\overline{Q_p}$ là trường đóng đại số của Q_p . Trên $\overline{Q_p}$ ta trang bị một chuẩn không Acsimet như sau :

Với mọi $x \in \overline{Q_p}$, tồn tại một mở rộng chuẩn tắc bậc n sao cho $x \in K$, khi đó :

$$|x| = \sqrt[n]{|N_{K/Q_p}(x)|_p}.$$

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

và chuẩn $|x|$ không phụ thuộc vào sự tồn tại của K.

Ta có kết quả sau :

Mệnh đề 1.2.5. *Hàm* $|\,.\,| : \overline{Q_p} \to R_+$ *xác định như trên là chuẩn không Acsimet duy nhất mở rộng chuẩn p - adic trên* Q_p. *Tuy nhiên,* $\overline{Q_p}$ *không đầy đủ theo chuẩn* $|\,.\,|$.

Ta đầy đủ hoá $\overline{Q_p}$ theo mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.2.6. *Tồn tại một trường* C_p *với chuẩn không Acsimet* $|\,.\,|$ *sao cho:*

i) $\overline{Q_p}$ *trù mật trong* C_p *và chuẩn không Acsimet* $|\,.\,|$ *là mở rộng của chuẩn trên* $\overline{Q_p}$ *ban đầu;*

ii) C_p *đầy đủ với chuẩn* $|\,.\,|$ *và* C_p *là một trường đóng đại số.*

1.3 Hàm chỉnh hình trên trường không Acsimet.

Ta kí hiệu K là trường đóng đại số , đầy đủ với chuẩn không Acsimet $|\,.\,|$ và có đặc số 0.

Các khái niệm về dãy , về chuỗi và sự hội tụ của dãy, của chuỗi giống như trong trường định chuẩn Acsimet. Tuy nhiên với chuẩn không Acsimet ta có một số tính chất đặc biệt sau.

Bổ đề 1.3.1 *Giả sử* $\{x_n\}$ *là một dãy trong* K. *Dãy* $\{x_n\}$ *là dãy Cauchy nếu và chỉ nếu* $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1} - x_n| = 0$.

Chứng minh

Điều kiện đủ hiển nhiên theo định nghĩa dãy Cauchy.

Ta chứng minh điều kiện cần với mọi $n, p \in N$ ta có :

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq \max\left\{|x_{n+p} - x_{n+p-1}|, |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}|, \ldots, |x_{n+1} - x_n|\right\}$$

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn