ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN DUY PHAN

ĐẶC TRƯNG CỦA CÁC TÍNH CHẤT ($\underline{DNDZ}$) VÀ ($\underline{WDZ}$) TRONG LỚP CÁC KHÔNG GIAN FRECHET

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2007

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN DUY PHAN

ĐẶC TRƯNG CỦA CÁC TÍNH CHẤT ($\underline{DNDZ}$) VÀ ($\underline{WDZ}$) TRONG LỚP CÁC KHÔNG GIAN FRECHET

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2007

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Như đã biết, các bất biến tôpô tuyến tính của các không gian Frechet có vai trò rất quan trọng trong lý thuyết các không gian Frechet, nói riêng, trong các định lý phân rã. Các bất biến tôpô tuyến tính (DN) và (W) đã được D.Vog giới thiệu và nghiên cứu sâu sắc. Vog đã sử dụng các bất biến tôpô tuyến tính đó để chứng minh định lý phân rã đối với các không gian Frechet trong trường hợp không gian hạch và trường hợp không gian Frechet - Hilbert. Đồng thời đã cho đặc trưng đầy đủ của các bất biến tôpô tuyến tính (DN) và (W).

Từ năm 1990 M.Poppenberg đã giới thiệu và nghiên cứu các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ) trong lớp các không gian Frechet phân bậc. Ông đã giới thiệu khái niệm ánh xạ tuyến tính tame giữa các không gian Frechet phân bậc và thiết lập định lý phân rã trong phạm trù các không gian Frechet phân bậc và các ánh xạ tuyến tính tame. Tiếp theo, trong trường hợp không gian hạch, Poppenberg đã cho đặc trưng đầy đủ của các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ). Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi chọn đề tài : " *Đặc trưng của các tính chất* $(\underline{DNDZ})$ *và* $(\underline{WDZ})$ *trong lớp các không gian Frechet* ".

Theo chúng tôi đề tài này có tính hiện đại và tính thời sự được nhiều người quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu. Luận văn nghiên cứu về đặc trưng của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$ trong lớp các không gian Frechet phân bậc.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu. Trên cơ sở mục đích đã đặt ra, luận văn tập trung vào các nhiệm vụ sau đây:

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ) trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ).
- Chứng minh chi tiết một số kết quả về các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$ trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$.

3. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết các nhiệm vụ đặt ra chúng tôi đã tiến hành:

- Đọc tham khảo các tài liệu trong và ngoài nước, trao đổi, tham khảo và học tập các chuyên gia cùng lĩnh vực nghiên cứu.
- Áp dụng các phương pháp truyền thống của giải tích hàm, giải tích hiện đại và các phương pháp của lý thuyết về các bất biến tôpô tuyến tính. Cụ thể ở đây chúng tôi đã kế thừa các kết quả và phương pháp gần đây của Vogt, M.Poppenberg để giải quyết các bài toán cụ thể đã nêu ra ở trên.

4. Bố cục của luận văn. Nội dung luận văn gồm 52 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 của luận văn trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ) trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ).

Chương 2 của luận văn cũng là chương cuối với nội dung chính là trình bày chứng minh chi tiết các kết quả của N.V.Khuê, L.M.Hải và B.Đ.Tắc về các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$ trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$. Phần cuối cùng của chương này dành cho việc trình bày các kết quả về tính ổn định của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$ đối với không gian đối ngẫu thứ hai.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Bản luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo trong tổ Giải tích, các thầy cô giáo trong trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, trường Cao Đẳng kỹ thuật mỏ Quảng Ninh cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2007

Tác giả

Nguyễn Duy Phan

CHƯƠNG 1

ĐẶC TRƯNG CỦA CÁC TÍNH CHẤT $(DNDZ)$ VÀ (ΩDZ) TRONG LỚP CÁC KHÔNG GIAN FRECHET

Trước tiên chúng tôi sẽ trình bày một số khái niệm và kết quả về các tính chất $(DNDZ)$ và (ΩDZ) là cơ sở để trình bày đặc trưng của các tính chất $(DNDZ)$, (ΩDZ).

1.1. Một số khái niệm cơ bản.

1.1.1. Định nghĩa. *Một dãy khớp các không gian lồi địa phương và ánh xạ tuyến tính liên tục là một dãy hữu hạn hay vô hạn*

$$\cdots \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to \cdots$$

sao cho ảnh của ánh xạ tuyến tính vào bằng hạt nhân của ánh xạ tuyến tính ra.

1.1.2. Định nghĩa. *Một dãy các không gian lồi địa phương và ánh xạ tuyến tính liên tục có dạng*

$$0 \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to 0$$

được gọi là dãy khớp ngắn nếu $Kerf = \{0\}$, $imf = kerg$ *và* $img = G$.

1.1.3. Định nghĩa. *Dãy khớp ngắn* $0 \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to 0$ *được gọi là chẻ nếu xảy ra một trong hai điều kiện tương đương sau :*

$i)$ f *có ngược trái.*

$ii)$ g *có ngược phải.*

Khi đó $F = E \oplus G$ ($\oplus$ là tổng trực tiếp tô pô của E và G).

Bây giờ xét phạm trù tame với các vật là các không gian Frechet phân bậc $E, F, \ldots$ (trên $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$), tức là các không gian Frechet được trang bị dãy các nửa chuẩn cố định

$$\|.\|_0 \le \|.\|_1 \le \|.\|_2 \le \ldots$$

xác định tôpô; dãy được gọi là bậc. Các không gian con và không gian thương được trang bị các nửa chuẩn cảm sinh. Các cấu xạ là các ánh xạ tuyến tính tame giữa các không gian Frechet phân bậc.

1.1.4. Định nghĩa. *Ánh xạ tuyến tính $A : E \to F$ được gọi là tame nếu tồn tại $b \geq 0$ và các hằng số $c_n > 0$ (có thể phụ thuộc vào n) sao cho*

$$\|Ax\|_n \leq c_n \|x\|_{n+b} \quad \text{với mọi } n \geq 0 \text{ và } x \in E.$$

1.1.5. Định nghĩa. *Ánh xạ tuyến tính $A : E \to F$ được gọi là đẳng cấu tame nếu A là song ánh và A, A^{-1} đều là tame.*

Hai bậc trên E được gọi là tương đương tame nếu phép đồng nhất là đẳng cấu tame.

1.1.6. Định nghĩa. *Dãy khớp ngắn các không gian Frechet phân bậc*

$$0 \to E \xrightarrow{\;i\;} F \xrightarrow{\;\pi\;} G \to 0$$

được gọi là khớp tame nếu các ánh xạ chính tắc $i : E \to iE$ và $\tilde{\pi} : F / iE \to G$ là các đẳng cấu tame.

1.1.7. Định nghĩa. *E được gọi là tổng trực tiếp tame của F, nếu tồn tại các ánh xạ tuyến tính tame $i : E \to F$ và $L : F \to E$ sao cho $L \circ i$ là phép đồng nhất trên E.*

Với mỗi $\varphi \in E'$ ta định nghĩa

$$\|\varphi\|_n^* = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\|_n \leq 1\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$U_n = \{x \in E : \|x\|_n \leq 1\}, U_n^0 = \{\varphi \in E' : \|\varphi\|_n^* \leq 1\}.$$

Các không gian Frechet sau đây là các không gian phân bậc một cách tự nhiên, tức là không gian dãy *Köthe* $l^p(a)$ và không gian các chuỗi luỹ thừa kiểu hữu hạn $\Lambda_\infty^p(a)$:

$$l^p(a) = \{x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\infty : \|x\|_n < +\infty, \forall n\},$$

$$\|x\|_n = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p a_{j,n}^p\right)^{1/p} \text{ nếu } 1 \le p < +\infty ,$$

$$\|x\|_n = \sup_{j=1,2,\dots,\infty} |x_j| a_{j,n} \text{ nếu } p = \infty ,$$

trong đó $a = (a_{j,n})_{j=1,n=0}^{\infty}$ là ma trận thoả mãn $0 \le a_{j,n} \le a_{j,n+1}$ với mọi j,n và $\sup_n a_{j,n} > 0$ với mọi j.

Đối với dãy bất kỳ $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \uparrow +\infty$, $\Lambda_\infty^p(\alpha) = l^p(a)$ với $a_{j,n} = e^{n\alpha_j}$. Đối với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, $s_\varepsilon^p = \Lambda_\infty^p(\varepsilon \log j) = l^p(a)$ với $a_{j,n} = j^{\varepsilon n}$, $l(a) = l^1(a), \Lambda_\infty(\alpha) = \Lambda_\infty^1(\alpha), s_\varepsilon = s_\varepsilon^1, s = s_1$.

Ta trang bị cho $\omega = K^\infty$ (tương ứng $(s_\varepsilon^p)^\infty$) các bậc

$$\|x\|_n = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ (tương ứng } \left\|(x^0, x^1, \dots)\right\|_n = \sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right|_n, x^i \in s_\varepsilon^p \text{).}$$

Trang bị cho $D[a,b] = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \subset [a,b]\}$ với bậc

$$\|f\|_n = \sup_{i=\overline{0,n}} \sup_{x \in [a,b]} \left|f^{(i)}(x)\right|.$$

Nếu H là không gian Frechet và $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2 \le \dots \le \|\cdot\|_n \le \dots$ là hệ tăng các nửa chuẩn liên tục trong H, H_k là không gian Banach kết hợp với nửa chuẩn $\|.\|_k$; $\omega_k : H \to H_k$ *và* $\omega_{n,k} : H_n \to H_k$ $(n > k)$ là các ánh xạ chính tắc.

Tương tự , nếu E là không gian Frechet phân bậc thì ta ký hiệu E_n là không gian Banach kết hợp với nửa chuẩn $\|.\|_n$, tức là không gian nhận được bằng cách bổ sung $(E / \ker \|.\|_n)$ đối với $\|.\|_n$.

Ký hiệu s không gian các dãy giảm nhanh với hệ các nửa chuẩn tương đương:

$$\|x\|_k = \sup \{|x_j| j^k : j \in \infty\} \text{ với mọi } x = (x_1, x_2, \dots) \in s .$$

Với mỗi k cố định đặt:

$$s_k = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in s : \|x\|_k = sup|x_j| j^k < +\infty\}.$$

1.1.8. Định nghĩa. *Cho E là không gian Frechet phân bậc.*

$i)$ Cho $\varepsilon > 0$ bất kỳ, E được gọi là (ε)- hạch tame nếu E đẳng cấu tame với không gian con của $(s^2_\varepsilon)^\infty$.

$ii)$ E được gọi là hạch tame nếu tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho E là (ε)- hạch tame, hoặc tương đương:

tồn tại $\varepsilon > 0, \theta \geq 0$ và các hằng số $c_{k,m} > 0$ sao cho

$$a_n(E_{k+m} \to E_k) \leq c_{k,m}(n+1)^{-\varepsilon(m-\theta)} \text{ với mọi } m \geq \theta, k \geq 0 \text{ và } n \geq 0,$$

ở đó $a_n(k, k+m) = a_n(E_{k+m} \to E_k)$ là các số xấp xỉ của các ánh xạ chính tắc $E_{k+m} \to E_k$.

Với không gian tuyến tính E bất kỳ và các tập con tuyệt đối lồi $A \subset B \subset E$ ta ký hiệu

$$d_n(A,B) := inf\{d(A,B,F) : F \subset E, dimF \leq n\}$$

là số Kolmogorov thứ n, mà trong đó với bất kỳ không gian con $F \subset E$

$$d(A,B,F) = inf\{\delta > 0 : A \subset \delta B + F\}$$

1.2. Đặc trưng của tính chất $(DNDZ)$.

1.2.1. Tính chất $(DNDZ)$ và Định lý chẻ tame.

Trong [11], [15] D.Vog đã chứng minh rằng không gian Frechet hạch E đẳng cấu tôpô với không gian con của s nếu E có tính chất (DN), tức là

$$\|.\|_n^2 \leq \|.\|_{n-1} . \|.\|_{n+1} \text{ với mọi } n.$$

Trong trường hợp này, với mỗi $0 \leq i \leq n$ và $k \geq 0$ ta có

$$\|.\|_n^{k+i} \leq \|.\|_{n-i}^k . \|.\|_{n+k}^i,$$

từ đó bằng cách lấy minimum theo r với mọi $r > 0$ ta nhận được