XÂY DỰNG MA TRẬN ĐỘ CỨNG PHẦN TỬ TẤM – GÂN ỨNG DỤNG TRONG TÍNH TOÁN KẾT CẤU TẤM COMPOSITE LỚP CÓ GÂN TĂNG CỨNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Ngô Như Khoa (*Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp - ĐH Thái Nguyên*) -
Đỗ Tiến Dũng (*Trường Cao đẳng Công nghiệp Việt - Hung*)

1. Giới thiệu

Nhờ có ưu điểm nổi trội về khả năng chịu lực trong khi chi phí về vật liệu và trọng lượng kết cấu được giảm ở mức đáng kể, mà các kết cấu tấm-vỏ có gân tăng cứng đã được sử dụng rất phổ biến ở hầu hết các ứng dụng trong kỹ thuật và đời sống, cho dù là các kết cấu chế tạo từ các loại vật liệu kinh điển hay các kết cấu được chế tạo từ vật liệu composite lớp. Tuy nhiên, trong thực tế của ngành cơ học kỹ thuật, việc tính toán cơ học đối với các kết cấu tấm-vỏ có gân tăng cứng luôn được xem là rất phức tạp và cho đến nay vẫn chưa có được lời giải tổng quát, đặc biệt là các kết cấu bằng vật liệu có tính dị hướng cao như composite lớp. Vì vậy, vấn đề này đã và đang được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu cơ học trong và ngoài nước. Ví dụ như, gần đây Kolli và Chandrashekhara [3] sử dụng phần tử đẳng tham số với các hàm nội suy khác nhau cho tấm và dầm để phân tích ứng xử phi tuyến của tấm gân Composite bằng việc sử dụng phần tử tứ giác 9 nút và phần tử gân 3 nút dựa trên lý thuyết tấm của Mindlin. Các tác giả Y.V.Satish Kumar, Madhujit Mukhopadhyay[4] sử dụng một phần tử tấm gân mới để phân tích ổn định cho kết cấu tấm có gân tăng cứng bằng vật liệu composite lớp, phần tử này là một sự tổ hợp của phần tử tam giác ứng suất phẳng của Allman và một phần tử uốn Mindlin –Kirchhoff rời rạc; mô hình này cũng có khả năng áp dụng đối với bài toán có số gân bất kỳ và hướng tuỳ ý. Nhóm tác giả Guanghui Qing, Jiajun Qiu, Yanhong Liu [5] dựa trên nghiệm bán giải tích của lý thuyết phương trình véctơ trạng thái, một mô hình toán học mới để phân tích dao động tự do của tấm gân nhiều lớp đã được phát triển bằng cách xem xét riêng biệt các phần tử tấm và gân; phương pháp này dựa trên điều kiện tương thích về ứng suất và biến dạng tại các điểm nút giao tiếp giữa tấm và gân; các tác giả cũng sử dụng phần tử tứ giác bậc nhất 4 nút và với phạm vi nghiên cứu giới hạn trong các kết cấu có gân bố trí dọc theo các cạnh của tấm. Bên cạnh một số công trình quốc tế đã công bố trên như đã liệt kê trên, gần đây cũng đã có một số công trình trong nước như: Nhóm các tác giả Trần Ích Thịnh, Trần hữu Quốc [2] đã nghiên cứu bài toán dao động của các kết cấu tấm có gân tăng cứng bằng vật liệu Composite; ở nghiên cứu này, các tác giả đã sử dụng mô hình phần tử tứ giác đẳng tham số 9 nút và phần tử dầm 3 nút độc lập với cùng hàm nội suy; ma trận độ cứng của phần tử dầm được xây dựng dựa trên điều kiện tương thích về chuyển vị tại mặt liên kết giữa tấm và gân trên cơ sở lý thuyết tấm của Mindlin; tương tự như các nghiên cứu của các tác giả khác, nghiên cứu này cũng chỉ khảo sát với các kết cấu có gân bố trí dọc theo các cạnh, hay việc chia lưới phải phụ thuộc vào sơ đồ bố trí của gân.

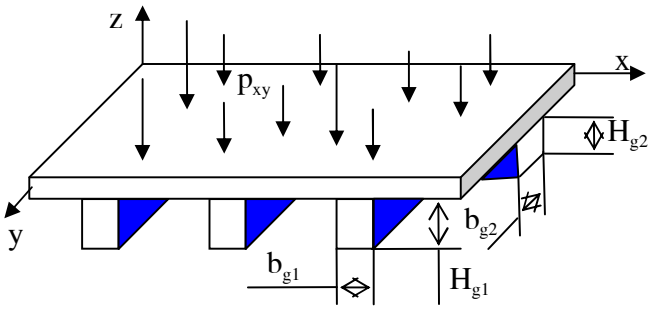
Mục đích được đặt ra trong báo cáo này là xây dựng được mô hình phần tử có thể áp dụng cho bài toán kết cấu tấm có gân tăng cứng ở dạng tổng quát (kết cấu có số lượng gân bất kỳ, hướng gân không nhất thiết phải song song với các cạnh bên của tấm). Tư tưởng chính để thực hiện trong báo cáo là rời rạc hoá kết cấu bởi các phần tử dạng tam giác bậc hai, trong đó bao gồm các phần tử đơn thuần là phần tử tấm chịu uốn truyền thống và các phần tử có sự tổ hợp với thành phần gân. Ở các phần tử tổ hợp ta xem phần tử tấm và phần gân là hai thành phần của

một thể thống nhất, như vậy ma trận độ cứng của phần tử tổ hợp sẽ là tổng ma trận độ cứng của các thành phần. Tuy nhiên, điểm mấu chốt ở đây đó là ma trận độ cứng của thành phần gân được xây dựng trên cơ sở của việc biểu diễn trường biến dạng trong gân thông qua một trường chuyển vị trung gian lấy trên phần tử tấm, và trường chuyển vị này được xác định nhờ việc nội suy từ các thành phần chuyển vị nút của phần tử tấm.

2. Ứng xử cơ học của tấm và dầm composite lớp

** Mô hình bài toán:*

Mô hình bài toán tấm có gân tăng cứng có thể được biểu diễn như hình bên (Hình 1). Để đơn giản hoá việc biểu diễn, chúng tôi sử dụng cách biểu diễn với vật liệu đơn lớp và không mô tả điều kiện liên kết, tuy nhiên liên kết của kết cấu cũng sẽ được khảo sát ở dạng tổng quát.



Hình 1. Mô hình kết cấu tấm chịu uốn có gân tăng cứng

Trong mô hình tổng quát, hệ trục chung lấy theo hệ quy chiếu của tấm *(x,y,z)* như hình vẽ, hệ trục địa phương của gân là *(x',y',z')*. Trong đó trục *z'≡z*, *x'≡phương của gân* và hệ trục quy đổi của gân $\left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\right)$ là hệ trục *(x,y,z)* tịnh tiến đi 1 khoảng $\left(0, 0, \dfrac{h+H}{2}\right)$, với *h* và *H* tương ứng là chiều dày của tấm và chiều cao của gân.

** Ứng xử cơ học của tấm composite lớp*

Quan hệ ứng suất-biến dạng trong tấm đối với lớp thứ *k* được biểu diễn như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \tag{1}$$

Trong đó, Q_{ij} là các hệ số độ cứng thu gọn, được xác định từ các hằng số đàn hồi của vật liệu [1]; và các thành phần biến dạng trong (1) được xác định qua chuyển vị như sau:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x;\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + zk_y;\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + zk_{xy};\ \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0;\ \overline{\gamma}_x = \gamma_{xz}^0; \tag{2}$$

trong đó:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x};\ \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial x};\ k_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x};\ k_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y};\ k_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x};$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x};\ \gamma_{yz} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y};\ \gamma_{xz} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{3}$$

Trong (3), *u, v* và *w* là các chuyển vị ở mặt giữa của tấm và θ_x, θ_y là các góc xoay. Tích phân (1) theo chiều dầy tấm, ta thu được phương trình quan hệ ứng suất - biến dạng:

$$\{N^t\} = \left[\ D^t\ \right]\{\varepsilon^{0t}\} \tag{4}$$

Trong đó $\{N^t\}$ là vectơ lực màng và mô men uốn, xoắn; $\left[\ D^t\ \right]$ là ma trận độ cứng vật liệu, được xác định từ các hằng số đàn hồi của vật liệu [1]:

$$\{\varepsilon^{0t}\} = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, k_x, k_y, k_{xy}, \gamma_{yz}^0, \gamma_{xz}^0\}^T \tag{5}$$

$$\{N^t\} = (N_x, N_y, N_{xy}, Q_{yz}, Q_{xz}, M_x, M_y, M_{xy})^T \tag{6}$$

$$\left[D^t\right] = \begin{bmatrix} A_{11}^t & A_{12}^t & A_{16}^t & B_{11}^t & B_{12}^t & B_{16}^t & 0 & 0 \\ A_{12}^t & A_{22}^t & A_{26}^t & B_{12}^t & B_{22}^t & B_{26}^t & 0 & 0 \\ A_{16}^t & A_{26}^t & A_{66}^t & B_{16}^t & B_{26}^t & B_{66}^t & 0 & 0 \\ B_{11}^t & B_{12}^t & B_{16}^t & D_{11}^t & D_{12}^t & D_{16}^t & 0 & 0 \\ B_{12}^t & B_{22}^t & B_{26}^t & D_{12}^t & D_{22}^t & D_{26}^t & 0 & 0 \\ B_{16}^t & B_{26}^t & B_{66}^t & D_{16}^t & D_{26}^t & D_{66}^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^t & A_{45}^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45}^t & A_{55}^t \end{bmatrix} \tag{7}$$

trong đó:

$$\left(A_{ij}^t, B_{ij}^t, D_{ij}^t\right) = \sum_{k=1}^{L} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left(Q_{ij}^t\right)_k \left(1, z, z^2\right) dz \quad \text{với } i=1,2,6 \tag{8}$$

$$\left(A_{44}^t, A_{45}^t, A_{55}^t\right) = \sum_{k=1}^{L} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[f_1^2 \left(Q_{44}^t\right)_k, f_1 f_2 \left(Q_{45}^t\right)_k, f_2^2 \left(Q_{55}^t\right)_k\right] dz \tag{9}$$

Trong đó Q_{ij}^t là các hệ số vật liệu của lớp thứ *k* trong hệ toạ độ tấm, f_1 và f_2 là các hệ số hiệu chỉnh cắt và *L* là số lớp vật liệu trong tấm.

** Quan hệ ứng suất-biến dạng của dầm composite lớp*

Các gân gia cường được mô hình bằng các dầm nhiều lớp và đặt theo phương bất kỳ đối với cạnh tấm. Dầm chỉ chịu uốn, khi đó thành phần chuyển vị *v(x,z)* là vô cùng bé nên bỏ qua, trong tính toán chỉ còn 2 thành phần chuyển vị *u(x,z)* và *w(x)* [6].

Trường chuyển vị theo Mindlin được biểu diễn như sau:

$$u(x,z) = u^0(x) + z\theta_x(x) \tag{10.a}$$

$$w(x) = w^0(x) \tag{10.b}$$

Trường biến dạng của dầm:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x\,; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 \tag{11}$$

Với:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}\,; k_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}\,;\ \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w^0}{\partial x} + \theta_x \tag{12}$$

Trường ứng suất:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11}' & 0 \\ C_{12}' & 0 \\ 0 & C_{45}' \\ 0 & C_{55}' \\ C_{16}' & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}_k \tag{13}$$

3. Hệ phương trình phần tử hữu hạn

Sử dụng phần tử tam giác 6 nút, mỗi nút 5 bậc tự do để mô hình tấm, ta có thể viết các chuyển vị tại điểm bất kỳ trong tấm như sau:

$$\{\mathbf{u}^e\} = \sum_{i=1}^{6} [N_i^e(x,y)]\{\mathbf{u}_i^e(t)\} \tag{14}$$

trong đó: $\{\mathbf{u}_i^e\} = \{u_i^0, v_i^0, w_i^0, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^T$; $[N_i^e] = N_i^e[\mathbf{I}]$

và N_i^e là các hàm nội suy Lagrange, [**I**] là ma trận đơn vị 5×5 và u_i, v_i,... là các chuyển vị nút.

Ta viết lại (14) dưới dạng:

$$\{\mathbf{u}^e\} = [\mathrm{N}_i^e]\{\mathrm{q}^e\} \tag{15}$$

trong đó: $[N_i^e] = [N_1^e], [N_2^e], ..., [N_6^e]$

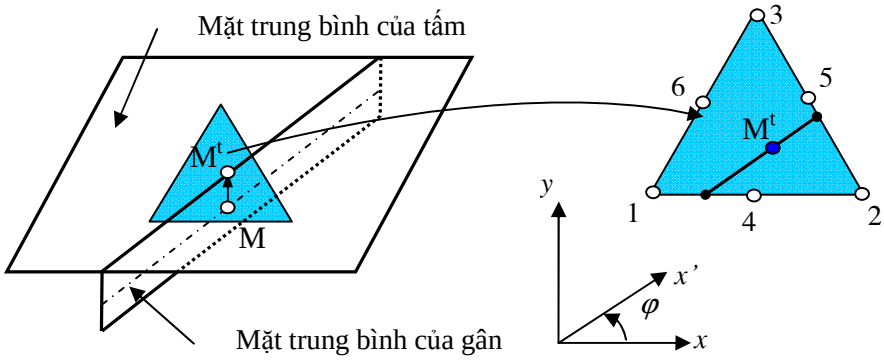
$$\{\mathrm{q}^e\} = \left(\{\mathbf{u}_1^e\}^T, \{\mathbf{u}_2^e\}^T, ..., \{\mathbf{u}_9^e\}^T\right)$$

Thay (15) vào (3) ta được

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} = [\mathbf{B}_t^e]\{\mathrm{q}^e\} \tag{16}$$

Để mô hình cho gân, ta xét trường hợp tổng quát, kết cấu tấm có gân tăng cứng hợp với trục x góc φ, có giá trị giới hạn là $0 \le \varphi \le 180^0$.

Đối với kết cấu tấm có gân tăng cứng, khi ta rời rạc hoá bởi các phần tử, sẽ tồn tại các phần tử có chứa đoạn gân tăng cứng như hình 2.



Hình 2. Mô hình phần tử tấm chứa một đoạn gân

Véc tơ chuyển vị của điểm M bất kỳ trên mặt trung bình của gân sẽ được xác định thông qua véc tơ chuyển vị M^t (M là hình chiếu của M^t theo phương vuông góc với mặt phẳng tấm)

Khi đó, véc tơ chuyển vị tại M^t:

$$\{u^{et}\} = \{u^{0t}, v^{0t}, w^{0t}, \theta_x^t, \theta_y^t\}^T \tag{17}$$

được nội suy bởi các thành phần chuyển vị nút của phần tử tấm như sau:

$$\{u^{et}\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & N_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \{q^e\} = [N]\{q^e\} \tag{18}$$

Các chuyển vị của gân trong hệ trục *(x', y', z')* được xác định theo các chuyển vị của tấm theo hệ trục *(x, y, z)*, nhờ đó mà điều kiện tương thích về chuyển vị của phần tử thanh và phần tử tấm tự động được thoả mãn [4].

$$\{u^{ex'}\} = \begin{Bmatrix} u'^0 \\ v'^0 \\ w'^0 \\ \theta_{x'} \\ \theta_{y'} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{0t} \\ v^{0t} \\ w^{0t} \\ \theta_x^t \\ \phi_y^t \end{Bmatrix}_e = [E][u^{et}] \tag{19}$$

trong đó: $\delta = (H+h)/2$ là khoảng cách giữa mặt phẳng trung bình tấm với mặt phẳng trung bình gân.

Biến dạng của gân trong hệ trục toạ độ địa phương $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ là:

$$\{\varepsilon^g\}^T = \{\varepsilon_{\bar{x}}, \gamma_{\bar{x}\bar{z}}\} \tag{20}$$

Các thành phần biến dạng trên gồm có: $\{\varepsilon^{0g}\}^T = \{\varepsilon_{\bar{x}}^0,\ \theta_{\bar{x},\bar{x}},\ \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^0\}$

Các thành phần biến dạng trong hệ trục $\left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\right)$ được chuyển đổi sang hệ trục (*x', y', z'*) như sau [1]:

$$\left\{\varepsilon^{0g}\right\} = \left[T^{g}\right]\left\{\varepsilon^{0gx'}\right\} \tag{21}$$

trong đó: $\left\{\varepsilon^{0gx'}\right\}$ là các thành phần biến dạng của $\left\{\varepsilon^{0g}\right\}$ được biểu diễn trong hệ toạ độ (*x', y', z'*) theo biểu thức:

$$\left\{\varepsilon^{0gx'}\right\}^{T} = \left\{\varepsilon^{0}_{x'}, \varepsilon^{0}_{y'}, \gamma^{0}_{x'y'}, \theta_{x',x'}, \theta_{y',y'}, \theta_{y',x'}, \theta_{x',y'}, \gamma^{0}_{y'z'}, \gamma^{0}_{x'z'}\right\} \tag{22}$$

và ma trận chuyển đổi hệ trục biến dạng :

$$\left\{T^{g}\right\} = \begin{bmatrix} \cos^{2}\varphi & \sin^{2}\varphi & \frac{1}{2}\sin 2\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^{2}\varphi & \sin^{2}\varphi & \frac{1}{2}\sin 2\varphi & \frac{1}{2}\sin 2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{23}$$

Biểu thức (22) biểu diễn qua chuyển vị $\left\{u^{ex'}\right\}$ dưới dạng:

$$\left\{\varepsilon^{0gx'}\right\} = \left[L^{g}\right] d^{x'} \tag{24}$$

Trong đó các ma trận toán tử L^g được xác định như sau:

$$L^{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x'} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{T} \tag{25}$$

Cuối cùng ta có các thành phần biến dạng được viết lại dưới dạng:

$$\left\{\varepsilon^{0gx'}\right\} = \left[L^{g}\right]\left\{d^{x'}\right\} = \left[L^{g}\right]\left[\overline{N}\right]\left\{a\right\} = \left[B^{g}\right]\left\{a\right\} \tag{26}$$

Trong đó các B^g là ma trận liên hệ biến dạng chuyển vị được xác định như sau:

$$\left[B^{g}\right] = \left[L^{g}\right]\left[\overline{N}\right] \tag{27}$$

Biểu thức thế năng của vật thể được xác định là:

$$\Pi = U + W \tag{28}$$

trong đó:

$U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon^T \sigma \, dV$ là năng lượng biến dạng đàn hồi, và $W = -\int_S d^T p dS = -\int_S w p dS$ là công của lực phân bố. Áp dụng nguyên lý cực tiểu hoá thế năng ta thiết lập được hệ phương trình PTHH:

$$\delta \Pi = 0 \tag{30}$$

Năng lượng biến dạng đàn hồi của tấm được xác định bởi:

$$U_t = \frac{1}{2}\int_A \left\{\boldsymbol{\varepsilon}^t\right\}^T \left[\mathbf{D}^t\right]\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^t\right\} dxdy = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K}_t \mathbf{q} \tag{31}$$

Năng lượng biến dạng đàn hồi của gân được xác định bởi:

$$U_e^g = \frac{b_g}{2}\int_{\ell g}\left(\{q\}^T \left[B^g\right]^T \left[T^g\right]^T \left[D^g\right]\left[T^g\right]\left[B^g\right]\{q\}\right) d\bar{x} = \frac{1}{2} q^T K_e^g q \tag{32}$$

Trong đó D^g là ma trận độ cứng của phần tử gân được biểu diễn như là:

$$\left[D^g\right] = \begin{bmatrix} A_{11}^g & B_{11}^g & 0 \\ B_{11}^g & D_{11}^g & 0 \\ 0 & 0 & A'^g_{11} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Ma trận độ cứng của tấm và gân được xác định là:

$$\left[K_e^t\right] = \int_{St}\left[B_1^T A \; B_1 + B_1^T B \; B_2 + B_2^T B \; B_1 + B_2^T D \; B_2 + B_3^T A' B_3\right] dS \tag{34}$$

trong đó:

$$\left[B_1\right] = \left[\left[L_1\right]N_1 \; \left[L_1\right]N_2 \; .....\left[L_1\right]N_{NE}\right] \tag{35.a}$$

$$\left[B_2\right] = \left[\left[L_2\right]N_1 \; \left[L_2\right]N_2 \; .....\left[L_2\right]N_{NE}\right] \tag{35.b}$$

$$\left[B_3\right] = \left[\left[L_3\right]N_1 \; \left[L_3\right]N_2 \; .....\left[L_3\right]N_{NE}\right] \tag{35.c}$$

$$A = \left[A_{ij}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[Q'_{ij}\right]_k \left(h_k - h_{k-1}\right) \tag{36.a}$$

$$B = \left[B_{ij}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[Q'_{ij}\right]_k \left(h_k^2 - h_{k-1}^2\right) \tag{36.b}$$

$$D = \left[D_{ij}\right] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[Q'_{ij}\right]_k \left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right) \text{ với: } i, j = 1, 2, 6. \tag{36.c}$$

$$A' = \left[A'_{ij}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[Q'_{ij}\right]_k \left(h_k - h_{k-1}\right) \text{ với: } i, j = 4, 5. \tag{36.d}$$

$$K_e^g = b_g \int_{\ell g} \left[B^g\right]^T \left[T^g\right]^T \left[D^g\right] \left[T^g\right] \left[B^g\right] d\bar{x} \tag{37}$$

Ma trận độ cứng của phần tử tổ hợp tấm-gân được xác định bởi:

$$K_e = K_e^t + K_e^g \tag{38}$$

Nếu như phần tử gân chỉ thuộc 1 phần tử tấm thì ma trận độ cứng của phần tử tổ hợp thực hiện như biểu thức (38), nếu thuộc cả hai phần tử tấm thì coi như chỉ thuộc 1 phần tử và phần tử còn lại coi như không chứa gân.

Công do tải trọng phân bố đều được xác định bởi:

$$\iint_{S_e} p(x,y)w(x,y)dS = q^T \iint_{S_e} [B_P]^T \{p(x,y)\}dS = q^T F \tag{39}$$

trong đó: $[B_P]$ là ma trận chuyển đổi lực bề mặt, nó được xác định từ các ma trận định vị và các hàm dạng như sau:

$$[B_P] = [L_P][N_1 \;\; N_2 .....N_6] \tag{40}$$

Trong trường hợp tổng quát, nếu coi các tải trọng tác dụng lên mặt trung bình của tấm, bao gồm các tải trọng tác dụng trong mặt phẳng tấm và kể cả tải trọng tác dụng vuông góc với bề mặt, thì *Lp* là ma trận đơn vị có kích thước (5×5).

Thay (31), (32) và (39) vào (30) ta thu được: $[K]\{q\} = \{F\}$, là hệ phương trình PTHH cần thiết lập.

4. Kết luận

Với mục đích xây dựng mô hình phần tử phục vụ cho bài toán kết cấu tấm có gân tăng cứng ở dạng tổng quát, khắc phục những hạn chế của những mô hình phần tử truyền thống, báo cáo này đã thiết lập được mô hình phần tử tổ hợp giữa phần tử tấm và thành phần gân chịu uốn. Mô hình này cho phép áp dụng đối với các kết cấu ở dạng tổng quát, cụ thể là có thể áp dụng đối với các kết cấu có số lượng gân bất kỳ, hướng gân không nhất thiết phải song song với các cạnh bên của tấm. Đây chính là tính ưu việt nổi bật của mô hình phần tử mới được xây dựng, có khả năng khắc phục những hạn chế của các mô hình PTHH dạng tấm và dạng gân truyền thống vẫn được sử dụng trong hầu hết các nghiên cứu về cơ học kết cấu composite trong và ngoài nước hiện nay. Ma trận độ cứng phần tử tổ hợp đã xây dựng đối với phần tử tam giác bậc 2, dựa trên lý thuyết tấm Mindlin.

Việc xây dựng thuật toán PTHH và chương trình tính toán số để khảo sát các bài toán tĩnh và động các kết cấu tấm có gân tăng cứng bằng vật liệu composite lớp sẽ được nhóm tác giả tiếp tục trình bày trong các báo cáo khoa học tiếp theo📖

Tóm tắt

Bài báo này tập trung vào việc nghiên cứu xây dựng mô hình phần tử hữu hạn tổ hợp giữa phần tử tấm với phần tử gân truyền thống. Nhờ mô hình này, vấn đề tính toán và phân tích cơ học các kết cấu tấm composite lớp có gân tăng cứng bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) có thể được giải quyết ở dạng tổng quát so với các dạng phần tử truyền thống khác. Nội dung chính được trình bày trong báo cáo là xây dựng ma trận độ cứng phần tử cho phần tử tấm tam giác 6 nút mà được tổ hợp với phần tử dầm, dựa trên tư tưởng chuyển vị của phần tử dầm được nội suy từ trực tiếp từ các nút của phần tử tấm. Trong đó, lý thuyết tấm được sử dụng là lý thuyết chuyển vị bậc nhất của Mindlin.

Summary

Building stiffness matrix of stiffened-plate element to applyi in laminated composite stiffened-plate analysis using finite element method

This paper concentrates on building finite element modeling, which is the combination of traditional plate element and beam plate. Based on this element, the calculation and analysis of laminated composite stiffened-plate mechanical by using finite element method (FEM) should be resolved in general forms. Main content of the paper is steps to build of stiffned matrix for 6 node triangular elements; the new element is combinated of plate and beam elements. The solution is based on beam element's displacement field is interpolated from plate element's nodes. In which, the Mindlin plate theory was applied.

Tài liệu tham khảo

[1]. Trần Ích Thịnh (1994). *Vật liệu composite- cơ học và tính toán kết cấu*. Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[2]. Trần Ích Thịnh - Trần Hữu Quốc (2006), "Phân tích cơ học kết cấu tấm Composite lớp có gân gia cường bằng phương pháp phần tử hữu hạn", Tuyển tập công trình khoa học hội nghị cơ học vật rắn biến dạng toàn quốc lần thứ 8, Thái Nguyên.

[3]. M. Kolli - K. Chandrashekhara, Finite element analysis of siffened laminated plates under transverse loading, University of Missouri-Rolla, Rolla, Missouri 65409, USA.

[4]. Y.V Satish Kumar - Madhujit Mukhopadhyay (1999), A new triangular stffened plate element for laminate analysis. Indian Institute of Technology, Kharagpur 721 302, India.

[5]. Guanghui, Jiajun Qiu- Yanhong Liu,(2001) Free vibration analysis of stffened laminated plates. Tianjin University ,92 Weijin Road, Tianjin 300072, People's Republic of China.

[6]. Valery V. Vasiliev & Evgeny V. Morozov(2001), Mechanics and Analysis of Composite Materials.

[7]. A.H Sheikha, A. Chakrabartib (2002), A new plate bendung element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates. Engineering College, Jalpaiguri-735102, West Bengal, India.