ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ THANH TRÀ

ĐỊNH LÝ KKM VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN TRONG LÝ THUYẾT TỐI ƯU VECTƠ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2011

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

−−−−−−−−−−−

ĐỖ THANH TRÀ

ĐỊNH LÝ KKM VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN TRONG LÝ THUYẾT TỐI ƯU VECTƠ

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH NGUYỄN XUÂN TẤN

Thái Nguyên - 2011

Mục lục

MỞ ĐẦU

Một trong những định lý nổi tiếng nhất của toán học trong thế kỉ trước là Nguyên lý điểm bất động Brouwer. Đó là định lý trung tâm của lý thuyết điểm bất động và cũng là một trong những nguyên lý cơ bản của giải tích phi tuyến. Định lý này được Brouwer chứng minh năm 1912, dựa vào một công cụ rất sâu sắc của tôpô là lý thuyết bậc của ánh xạ liên tục nên khá phức tạp. Vì thế, nhiều nhà toán học đã tìm cách chứng minh Nguyên lý điểm bất động Brouwer bằng những công cụ đơn giản hơn. Năm 1929, ba nhà toán học Ba Lan là Knaster, Kuratowski và Mazurkiewicz đã chứng minh được một kết quả quan trọng mang tên ”Bổ đề KKM” bằng phương pháp tương đối sơ cấp mà từ đó suy ra được Nguyên lý điểm bất động Brouwer.

Bổ đề KKM được chứng minh dựa trên một kết quả của Sperner năm 1928 về phép tam giác phân một đơn hình, thuộc lĩnh vực toán tổ hợp, một lĩnh vực tưởng chừng như không liên quan gì đến lý thuyết điểm bất động. Một điều thú vị nữa là từ Nguyên lý điểm bất động Brouwer ta cũng chứng minh được Bổ đề KKM, từ đó Nguyên lý điểm bất động Brouwer và Bổ đề KKM là tương đương nhau. Từ đây Bổ đề KKM đã đặt nền tảng và tạo bước ngoặt lớn cho sự phát triển của ”Lý thuyết KKM”.

Mặc dù Bổ đề KKM rất quan trọng, vì nó cho ta một chứng minh đơn giản Nguyên lý điểm bất động Brouwer nhưng lại hạn chế do chỉ áp dụng được cho các không gian vectơ hữu hạn chiều. Để khắc phục điều này, năm 1961, nhà toán học nổi tiếng Ky Fan đã mở rộng bổ đề KKM cho trường hợp không gian vectơ tôpô bất kỳ. Định lý của Ky Fan ngày nay được gọi là "Nguyên lý ánh xạ KKM".

Nguyên lý ánh xạ KKM. Giả sử E là không gian vectơ tôpô bất kì, X là tập con khác rỗng của E và $F : X \to 2^E$ là ánh xạ thỏa mãn

1. F(x) là tập đóng với mọi x $\in$ X;
2. $co\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} F\left(x_i\right)$ với mọi $\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\} \subset X$;
3. $F\left(x_0\right)$ là tập compact với x_0 nào đó thuộc X.

Khi đó

$$\bigcap_{x \in X} F\left(x\right) \neq \emptyset.$$

Năm 1972, dựa vào Nguyên lý ánh xạ KKM năm 1961, Ky Fan đã chứng minh được một kết quả quan trọng mà sau này người ta gọi là "Bất đẳng thức Ky Fan".

Bất đẳng thức Ky Fan. Giả sử E là không gian vectơ tôpô bất kì, X là tập con lồi, compact, khác rỗng của E và $f : X \times X \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn

1. $f\left(x, x\right) \leq 0$ với mọi $x \in X$;
2. $f\left(x, y\right)$ là tựa lõm theo x với mỗi y cố định;
3. $f\left(x, y\right)$ là nửa liên tục dưới theo y với mỗi x cố định.

Khi đó, tồn tại $y^* \in X$ sao cho $f\left(x, y^*\right) \leq 0$ với mọi $x \in X$.

Từ đây, Bất đẳng thức Ky Fan trở thành một công cụ quan trọng để nghiên cứu các bài toán như: Tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động, điểm cân bằng Nash, điểm yên ngựa,....

Đến năm 1984, Ky Fan tiếp tục mở rộng Nguyên lý ánh xạ KKM và chứng minh một số kết quả quan trọng như: Các định lý ghép đôi (matching) cho phủ đóng hay phủ mở của các tập lồi, các định lý điểm trùng và các định lý tương giao cho các tập với thiết diện lồi.

Có thể nói, từ đây Nguyên lý ánh xạ KKM đã thu hút nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm, nghiên cứu và suy ra được nhiều kết quả mới.

Những kết quả đó cùng rất nhiều dạng mở rộng và tương đương đã được tập hợp lại dưới cái tên: Lý thuyết KKM. Lý thuyết này đã được sử dụng rộng rãi như một công cụ hữu ích trong các lĩnh vực như: Lý thuyết điểm bất động, lý thuyết minimax, toán kinh tế, tối ưu hóa,...

Mục đích của luận văn là trình bày một số kết quả cơ bản về định lí KKM và các vấn đề liên quan trong lý thuyết tối ưu vectơ và áp dụng vào tìm nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II. Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm ba chương

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về một số không gian vectơ và về ánh xạ đa trị để tiện cho việc theo dõi luận văn.

Chương 2: Trình bày một số kiến thức về ánh xạ KKM và các ứng dụng của nó.

Chương 3: Đề cập đến bài toán tựa cân bằng tổng quát loại II, các định lý về tồn tại nghiệm của nó và một số vấn đề liên quan.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của GS.TSKH Nguyễn Xuân Tấn - Viện toán học Việt Nam. Nhân dịp này, tôi xin bày tỏ sự kính trọng, lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Xin trân trọng cám ơn các thầy, cô giáo thuộc viện toán học và các thầy, cô giáo của trường ĐHSP Thái Nguyên đã trực tiếp giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Xin thành kính cám ơn bố mẹ đã sinh thành và nuôi dưỡng, cám ơn những người thân yêu trong gia đình, cũng như bạn bè, đồng nghiệp đã luôn bên cạnh ủng hộ, động viên giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Do trình độ còn hạn chế, nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót về nội dung cũng như về cách trình bày, tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 7 năm 2011

Tác giả

Đỗ Thanh Trà

Chương 1

Kiến thức cơ bản.

Trong chương này, trình bày một số kiến thức cơ bản về các không gian cần dùng như không gian Banach, không gian Hilbert, không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương và một số tính chất của ánh xạ đa trị như tính liên tục, tính lồi theo nón của ánh xạ đa trị, điều kiện cần và đủ để ánh xạ đa trị liên tục trên và liên tục dưới theo nón. Ta sẽ chỉ ra mối quan hệ giữa các tính chất này và tổng quát hóa một số kết quả quen biết trong giải tích hàm, ví dụ một hàm lồi nửa liên tục dưới thì liên tục dưới yếu,...

1.1 Các không gian cần dùng

Ta đã biết, khi xét một bài toán, trước tiên phải nói đến không gian, sau đó mới nghiên cứu đến hàm số. Cùng với sự phát triển của toán học, người ta đã mở rộng việc xét một bài toán từ không gian chỉ gồm các số lên các không gian mang tính trừu tượng hơn như: không gian Banach, không gian Hilbert, không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương,.. Sau đây, ta sẽ tóm tắt một số kiến thức cơ bản của một số không gian để tiện cho việc theo dõi luận văn.

1.1.1 Không gian Banach

Toán học hiện đại được xây dựng trên cơ sở lý thuyết tập hợp cùng với các hệ tiên đề. Người ta không có định nghĩa chính xác, cụ thể tập hợp là gì mà coi chúng như những họ các đối tượng có cùng những tính chất nào đó. Ví dụ như họ các số nguyên dương là tập hợp các số tự nhiên, họ các hàm số được định nghĩa trên đoạn $[a, b]$ tạo thành tập hợp các hàm số trên đoạn thẳng ấy, họ những học sinh cùng học trong lớp học nào đó là tập hợp các học sinh trong lớp ấy, ... Các tập hợp thường được kí hiệu bằng những chữ cái in hoa như: A, X, Y, ...và các phần tử của chúng thường được kí hiệu bởi các chữ: a, x, y, ... Nếu x là phần tử của tập hợp X, ta kí hiệu $x \in X$. Ta có:

Định nghĩa 1.1.1. *a) Với mỗi cặp phần tử x, y của tập hợp X (gọi tắt là tập X), đều xác định một qui tắc nào đó, một số thực $\rho(x, y)$, gọi là khoảng cách giữa x và y.*
b) Qui tắc nói trên thỏa mãn các điều kiện sau:
i) $\rho(x, y) > 0$ nếu $x \neq y$; suy ra $\rho(x, y) = 0$ nếu $x = y$;
ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, với mọi x, y (tính đối xứng);
iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, với mọi x, y, z (bất đẳng thức tam giác);
Hàm số $\rho(x, y)$ được gọi là metric của không gian X và cặp (X, ρ) được gọi là không gian metric.

Ví dụ 1.1. *a) Tập M bất kì của tập các số thực $\mathbb{R}$ với khoảng cách thông thường $\rho(x, y) = |x - y|$ là một không gian metric.*
b) Không gian n chiều $\mathbb{R}^n$ với khoảng cách $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$ (với $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$), là một không gian metric.

Nhận xét: Trên một tập hợp, có thể chọn những metric khác nhau để có những không gian metric khác nhau.

Định nghĩa 1.1.2. *Ta nói rằng dãy điểm $x_1, ..., x_n, ...$ của một không gian metric X hội tụ tới điểm x của không gian đó, nếu $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$. Ta kí hiệu $x_n \to x$ hay $lim x_n = x$, và điểm x được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$.*

Nhận xét: Dãy con của một dãy hội tụ cũng là một dãy hội tụ.

Từ định nghĩa dãy hội tụ, ta có tính chất sau:
1) Nếu $x_n \to x$ và $x_n \to x'$ thì x = x';
2) Nếu $x_n \to x$ và $y_n \to y$ thì $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

Định nghĩa 1.1.3. *Cho X là một tập hợp. Nếu trên X có hai phép tính: phép cộng giữa hai phần tử của X và phép nhân một số (thực hoặc phức) với một phần tử của X thỏa mãn các điều kiện*

1) $x, y \in X$ thì $x + y \in X$, với mọi $x, y \in X$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, với mọi $x, y, z \in X$;

3) $x + y = y + x$, với mọi $x, y \in X$;

4) Tồn tại $0 \in X$ có tính chất: với mọi $x \in X$ thì $x + 0 = 0 + x = x$. 0 được gọi là phần tử gốc hoặc phần tử trung hòa;

5) Với mọi $x \in X$ thì tồn tại (- x) sao cho $x + (-x) = 0$;

6) $1.x = x$, với mọi $x \in X$;

7) $l.(k.x) = (l.k).x$, với mọi $l, k \in K, x \in X$;

8) $(l + k).x = l.x + k.x$, với mọi $l, k \in K, x \in X$;

9) $l.(x + y) = l.x + l.y$, với mọi $l \in K, x, y \in X$.

Khi đó, X được gọi là một không gian tuyến tính.

Định nghĩa 1.1.4. *Cho X là một không gian tuyến tính. Hàm số $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn các điều kiện:*

i) $\|x\| \geq 0$, với mọi $x \in X$ và $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, với mọi $\lambda \in K, x \in X$;

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, với mọi $x, y \in X$

; được gọi là một chuẩn và cặp $(X, \|.\|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Định nghĩa 1.1.5. *Giả sử $(X, \|.\|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn. Dễ thấy, hàm $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$*

$$(x, y) \mapsto \rho\,(x, y) = \|x - y\|$$

là một metric.

Như vậy, không gian tuyến tính định chuẩn là không gian metric. Do đó, mọi tính chất của không gian metric đều đúng cho không gian tuyến *tính định chuẩn .*

Định nghĩa 1.1.6. *Không gian tuyến tính định chuẩn* $(X, \|.\|)$ *đầy đủ với metric xác định như trên gọi là một không gian Banach.*

Ví dụ 1.2. *a)Cho* $X = \mathbb{R}^n$ *với chuẩn* $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)^2}, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *thì X là không gian Banach.*

b) Cho $X = C_{[a,b]}$ *với chuẩn* $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|, f \in X$ *thì X là không gian Banach.*

Định nghĩa 1.1.7. *Cho dãy* $\{x_n\} \subseteq (X, \|.\|)$*, lập tổng riêng* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$*. Nếu* $S_n \to S \in X$*, ta nói chuỗi* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *hội tụ và* $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *là tổng của chuỗi. Nếu chuỗi* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ *hội tụ thì ta nói chuỗi* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *hội tụ tuyệt đối.*

Định lý 1.1.8. *Trong không gian Banach X, mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $\{S_n\}$ là dãy cauchy. Thật vậy, với mọi $m > n$, $\|S_m - S_n\| = \|x_{n+1} + ... + x_m\| \le \sum\limits_{i=n+1}^{m} \|x_i\| \to 0$ khi $n \to \infty$.Vì X đầy đủ, nên dãy $\{S_n\}$ hội tụ. Do đó, chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ hội tụ. Hơn nữa, vì $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\| \le \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|$, nên $\|S_n\| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$. Do đó, $\|S\| \le \left\|\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\right\|$. □

Chú ý 1.1. *Điều ngược lại của định lý trên cũng đúng, tức là nếu trong không gian tuyến tính định chuẩn X, mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ thì X là một không gian Banach.*

1.1.2 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.9. *Cho X là không gian tuyến tính. Nếu trên X có dạng song tuyến tính* $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \quad \textit{thỏa mãn:}$$