ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN BÁ HÀ

GIẢ THUYẾT ABC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN BÁ HÀ

GIẢ THUYẾT ABC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

Mã số: 60.46.05

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH HÀ HUY KHOÁI

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Hà Huy Khoái, Viện Toán học. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của: Viện Toán học, Đại học sư phạm Thái Nguyên, Đại học khoa học tự nhiên Thái Nguyên, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, khoa Sau đại học, sở GDĐT Thái Nguyên và trường THPT Điềm Thụy, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2011

Học viên

Trần Bá Hà

Mở đầu

Sự phát triển của số học, đặc biệt là trong những thập kỷ gần đây, chịu ảnh hưởng rất lớn của sự tương tự giữa số nguyên và đa thức. Nói cách khác, khi có giả thuyết nào đó chưa chứng minh được đối với các số nguyên, người ta cố gắng chứng minh sự kiện tương tự cho các đa thức. Điều đó thường dễ làm hơn, có lẽ nguyên nhân chủ yếu là vì: đối với các đa thức thì ta có phép tính đạo hàm, trong khi một khái niệm tương tự chưa có đối với các số nguyên.

Mục đích của luận văn là trình bày định lý Mason và một số ứng dụng của định lý này. Từ định lý Mason cho đa thức, ta có sự tương tự số học đó là giả thuyết *abc*. Từ đó nghiên cứu sự mở rộng của giả thuyết *abc* trong $\mathbb{Z}$ và trong $\mathbb{K}[t]$, đưa ra một số ví dụ liên quan tới giả thuyết *abc*.

Luận văn được chia làm hai chương, trong đó
Chương 1: Trình bày định lý Mason và một số ứng dụng của định lý Mason.
Chương 2: Trình bày giả thuyết *abc*, giả thuyết Halt. Áp dụng giả thuyết *abc* để chứng minh phương trình Brocard chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên dương. Trình bày sự mở rộng của giả thuyết *abc* trong $\mathbb{Z}$ và trong $\mathbb{K}[t]$, đưa ra một số ví dụ liên quan đến giả thuyết này.

Phần kết luận của luận văn tổng kết lại toàn bộ các kết quả đã đạt được.

Chương 1

Định lý Mason

Mục đích của chúng tôi trong chương này là trình bày một vài tương tự giữa trường số và trường hàm, định lý Mason và một vài ứng dụng của định lý này.

1.1 Sự tương tự của trường số và trường hàm

Trước hết chúng ta thấy giữa tập hợp các số nguyên và tập hợp các đa thức có nhiều sự tương tự, chẳng hạn:

-Các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia hoàn toàn như nhau cho cả hai tập hợp.

-Nếu đối với các số nguyên ta có các *số nguyên tố*, thì đối với các đa thức ta có đa thức *bất khả quy.*

-Đối với hai số nguyên cũng như đối với hai đa thức, có thể định nghĩa *ước chung lớn nhất.* Hơn nữa, trong cả hai trường hợp, ước chung lớn nhất này tìm được bằng *thuật toán Euclid.*

-Mỗi số nguyên có thể phân tích thành tích các *thừa số nguyên tố*, mỗi đa thức có thể phân tích thành tích các *đa thức bất khả quy.*

-Các *số hữu tỷ* tương ứng với các *hàm hữu tỷ.*

-Mỗi số nguyên có *giá trị tuyệt đối* của nó, còn mỗi đa thức khác không đều có *bậc.*

-Đối với các đa thức a, b ta có $\deg(a.b) = dega + degb$, còn đối với hai số nguyên dương x, y ta có $\log(x.y) = logx + logy$.

Chúng ta có thể kéo dài bảng danh sách tương tự này. Ở đây chúng tôi sẽ đi vào một vài tương tự khó nhìn thấy hơn. Ta để ý đến sự tương tự giữa phân tích ra thừa số nguyên tố và phân tích bất khả quy. Nếu giả thiết rằng $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số, thì mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ có thể phân tích được dưới dạng sau:

$$f(x) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n},$$

trong đó $p_i(x) = (x - \alpha_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{K}$. Như vậy có thể thấy rằng, trong sự tương tự giữa phân tích bất khả quy và phân tích ra thừa số nguyên tố, các nghiệm của đa thức tương ứng với các ước nguyên tố của số nguyên. Do đó số các nghiệm phân biệt của một đa thức có vai trò tương tự như số các ước nguyên tố của một số nguyên. Từ nhận xét đó ta đi đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa: Cho a là một số nguyên. Ta định nghĩa *căn của* a, ký hiệu qua $N_0(a)$, là tích các ước nguyên tố của a :

$$N_0(a) = \prod_{p/a} p.$$

Năm 1983, R. C. Mason đã cho một kết quả đánh giá quan hệ giữa bậc của các đa thức với số các nghiệm phân biệt của tích các đa thức đó. Kết quả đó chính là định lý Mason, mà nội dung cụ thể của định lý như sau.

1.2 Định lý Mason

Định lý 1.1. (Định lý Mason)

Giả sử $a(t), b(t), c(t)$ là các đa thức với hệ số phức, nguyên tố cùng nhau từng cặp và thỏa mãn hệ thức:

$$a(t) + b(t) = c(t).$$

Khi đó nếu kí hiệu $n_0(f)$ là số nghiệm phân biệt của đa thức f, thì ta

có
$$\max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \leqslant n_0(abc) - 1.$$
Chứng minh. Từ giả thiết $a + b = c$, ta suy ra
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1. \qquad (1.1)$$
Ta đặt: $f = \dfrac{a}{c}$ và $g = \dfrac{b}{c}$.
Thay vào (1.1) ta có: $f + g = 1$.
Ta lấy đạo hàm hai vế của phương trình này ta được kết quả:
$$f' + g' = 0,$$
tương đương với
$$g' = -f'.$$
Với mục đích xét số các nghiệm của đa thức, ta xét các thương của đạo hàm và hàm số. Ta có:
$$(\frac{f'}{f}).f + (\frac{g'}{g}).g = 0,$$
tương đương với
$$(\frac{f'}{f}).f = -(\frac{g'}{g}).g,$$
do đó
$$\frac{\frac{f'}{f}}{\frac{g'}{g}} = -\frac{g}{f} = -\frac{b}{a}.$$
Từ đây ta có
$$\frac{b}{a} = -\frac{\frac{f'}{f}}{\frac{g'}{g}}.$$
Mặt khác, giả sử $R(t)$ là một hàm hữu tỷ mà có phân tích như sau:
$$R(t) = \Pi(t - v_i)^{q_i}, \ \ \mathrm{q}_i \in \mathbb{Z}.$$

Hay:

$$R(t) = (t - v_1)^{q_1}(t - v_2)^{q_2} \ldots (t - v_i)^{q_i}.$$

Ta có:

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{q_1}{t - v_1} + \frac{q_2}{t - v_2} + \ldots + \frac{q_i}{t - v_i}.$$

Do đó ta viết dưới dạng ngắn gọn như sau:

$$\frac{R'}{R} = \sum \frac{q_i}{(t - v_i)}. \tag{1.2}$$

Giả sử các đa thức a, b, c tương ứng có các nghiệm phân biệt là $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$.
Ta có:

$$a(t) = \Pi(t - \alpha_i)^{m_i},$$

$$b(t) = \Pi(t - \beta_j)^{n_j},$$

$$c(t) = \Pi(t - \gamma_\mathrm{k})^{r_k}.$$

Từ cách đặt : $f = \frac{a}{c}$ và $g = \frac{b}{c}$, bằng cách tính đạo hàm và biến đổi ta tính được:

$$\frac{f'}{f} = \frac{a'}{a} - \frac{c'}{c}.$$

Từ (1.2) bằng cách tương tự nên ta suy ra:

$$\frac{a'}{a} = \sum \frac{m_i}{t - \alpha_i},$$

$$\frac{c'}{c} = \sum \frac{r_k}{t - \gamma_k}.$$

Vậy phân thức:

$$\frac{f'}{f} = \frac{a'}{a} - \frac{c'}{c} = \sum \frac{m_i}{t - \alpha_i} - \sum \frac{r_k}{t - \gamma_k}.$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{g'}{g} = \frac{b'}{b} - \frac{c'}{c} = \sum \frac{n_j}{t - \beta_j} - \sum \frac{r_k}{t - \gamma_k},$$

nên:

$$\frac{b}{a} = -\frac{\frac{f'}{f}}{\frac{g'}{g}} = -\frac{\sum \frac{m_i}{t-\alpha_i} - \sum \frac{r_k}{t-\gamma_k}}{\sum \frac{n_j}{t-\beta_j} - \sum \frac{r_k}{t-\gamma_k}}. \tag{1.3}$$

Mẫu số chung của các phân số trong phần tử số và mẫu số của thương (1.3) là:

$$d = \prod(t-\alpha_i)\prod(t-\beta_j)\prod(t-\gamma_k).$$

Đó là một đa thức có bậc là $n_0(a.b.c)$.

Như vậy, $\frac{df'}{f}$ và $\frac{dg'}{g}$ là các đa thức có bậc không quá $n_0(a.b.c) - 1$. Mặt khác ta có:

$$\frac{b}{a} = -\frac{\frac{df'}{f}}{\frac{dg'}{g}}. \tag{1.4}$$

Vì a, b nguyên tố cùng nhau, nên từ đẳng thức (1.4) suy ra bậc của a và bậc của b đều không vượt quá $n_0(a.b.c) - 1$. Điều tương tự cũng đúng đối với c do vai trò đối xứng của a, b, c trong phương trình xuất phát. Do đó :

$$\max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \leqslant n_0(abc) - 1.$$

Vậy định lý đã được chứng minh. Từ định lý Mason, cho ta một số ứng dụng sau . $\square$

1.3 Một vài ứng dụng của định lý Mason

Định lý Mason cho ta một cách chứng minh đơn giản của định lý Fermat đối với đa thức với hệ số phức.