ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN HÀ CHI

MỘT VÀI MỞ RỘNG VÉCTƠ CỦA NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Chuyên ngành : Toán giải tích

Mã số: 60.46.01

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. TRƯƠNG XUÂN ĐỨC HÀ

Thái Nguyên - 2011

Mục lục

MỞ ĐẦU

Chúng ta đã biết rằng một hàm f nửa liên tục dưới trên một tập đóng X thì đạt cực tiểu trên đó nếu X compact, điều này không còn đúng nữa nếu bỏ giả thiết compact.

Năm 1974, Ekeland đưa ra một nguyên lý mới (được gọi là nguyên lý biến phân Ekeland). Nguyên lý này phát biểu rằng nếu cho trước một hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới f trên một không gian mêtríc đầy đủ, ta có thể tìm được một hàm nhiễu của f sao cho hàm nhiễu này có cực tiểu toàn cục.

Ngoài ra, nếu f là hàm khả vi thì đạo hàm của f có thể làm nhỏ tùy ý.

Trong hơn 30 năm qua, nguyên lý biến phân Ekeland đã được mở rộng theo nhiều hướng: các ánh xạ là đơn trị hoặc đa trị nhận giá trị trong không gian lồi địa phương, không gian véctơ, ánh xạ nhiễu là hàm trơn,...

Nguyên lý này đã trở thành một công cụ mạnh và được sử dụng rất nhiều trong giải tích không trơn, giải tích phi tuyến, tối ưu, ...

Trong bản luận văn này, chúng tôi giới thiệu lại một cách có hệ thống một vài dạng véctơ của nguyên lý biến phân Ekeland được trình bày trong các bài báo [3], [10], [12] của các tác giả Y.Araya, Chr.Tammer, C.Zălinescu và T.X.Đ.Ha.

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 3 chương:

- *Chương 1*: Gồm một số kết quả của giải tích cổ điển về các điều kiện để hàm nửa liên tục dưới đạt giá trị cực tiểu; nguyên lý biến phân Ekeland cổ điển được trình bày trong bài báo [6] và một cách chứng minh ngắn gọn nguyên lý biến phân Ekeland cho trường hợp không gian hữu hạn chiều có sử dụng điều kiện bức theo [1] .

- *Chương 2*: Một vài sự mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho ánh xạ đơn trị và đa trị nhận giá trị trong không gian véctơ từ các bài báo

[3], [10].

- *Chương 3*: Định lý về sự tồn tại của điểm cực tiểu của một tập trong không gian tích và một vài mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland được giới thiệu trong bài báo [12] . Qua cách tiếp cận mới này, ta có được các kết quả đã trình bày ở chương 2.

Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn PGS.TS Trương Xuân Đức Hà, người đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin được bầy tỏ lòng biết ơn tới các thầy cô của Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, trường Đại học Sư phạm I - Hà Nội, Viện Toán học Hà Nội đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học.

Đồng thời tác giả xin chân thành cảm ơn Trung tâm Giáo dục thường xuyên và Đào tạo cán bộ tỉnh Quảng Ninh, gia đình và bạn bè đã giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2011

Chương 1

NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND CỔ ĐIỂN

Trong chương này, chúng tôi trình bày lại nguyên lý biến phân được I.Ekeland đề xuất năm 1974 trong bài báo [6] .

1.1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trước hết ta nhắc lại một số kiến thức cổ điển về hàm nửa liên tục dưới và một số tính chất của nó.

Cho X là một không gian tôpô và hàm số $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Kí hiệu miền hữu hiệu và trên đồ thị của hàm f như sau:

$$domf := \{x \in X \,|\, f(x) < +\infty\}.$$

$$epif := \{(x,a) \in X \times \mathbb{R} \,|\, f(x) \leqslant a\}.$$

Với mỗi $a \in \mathbb{R}$, kí hiệu tập mức của f là tập

$$L_a f := \{x \in X \,|\, f(x) \leqslant a\}.$$

Định nghĩa 1.1.1. *Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới tại $x_0 \in X$ nếu $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$.*

Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu f nửa liên tục dưới tại mọi điểm thuộc X.

Nhận xét 1.1.2. Hàm f là nửa liên tục dưới tại x_0 khi và chỉ khi $\forall\varepsilon > 0$ tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $\forall x \in U$ ta có $f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$.

Sau đây là một ví dụ minh họa cho tính nửa liên tục dưới của hàm số.

Ví dụ 1.1.3. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ -1, x = 0 \end{cases}$$

Khi đó f là hàm nửa liên tục dưới trên $\mathbb{R}$.

Ta có một số tính chất của hàm nửa liên tục dưới như sau:

Mệnh đề 1.1.4. *Cho X là một không gian tôpô và hàm $f : X \to \mathbb{R} \cup \{ +\infty\}$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) f là hàm nửa liên tục dưới trên X.

(ii) Trên đồ thị của f là tập đóng trong $X \times \mathbb{R}$.

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$ thì tập mức $L_a f$ là tập đóng trong X.

Chứng minh. **(i) $\Rightarrow$ (ii)** Giả sử f là hàm nửa liên tục dưới trên X. Ta lấy dãy $\{(x_n, a_n)\} \subset epif$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, a_n) = (x_0, a_0)$. Do $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ và f là hàm nửa liên tục dưới tại x_0 nên $\lim\limits_{n\to\infty} \inf f(x_n) \geqslant f(x_0)$. Ta lại có $\{ (x_n, a_n)\} \subset epif$ nên $f(x_n) \leqslant a_n (\forall n \in \mathbb{N})$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(x_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Vậy $f(x_0) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \inf f(x_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Tức là, $(x_0, a_0) \in epif$, hay $epif$ là tập đóng trong $X \times \mathbb{R}$.

(ii) $\Rightarrow$(iii) Giả sử $epif$ là tập đóng trong $X \times \mathbb{R}$. Với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta chứng minh $L_a f$ là tập đóng trong X. Thật vậy; lấy dãy $\{ x_n\} \subset L_a f$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ta có $f(x_n) \leqslant a, \forall n$ vì $\{ x_n\} \subset L_a f$ nên $(x_n, a) \in epif$. Do $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, a) = (x_0, a)$. Ta lại có $epif$ là tập đóng kéo theo $(x_0, a) \in epif$. Vậy $f(x_0) \leqslant a$. Suy ra $x_0 \in L_a f$, hay $L_a f$ là tập đóng.

(iii)$\Rightarrow$ (i) Giả sử $L_a f$ là tập đóng trong $X, \forall a \in \mathbb{R}$ nhưng f không là hàm nửa liên tục dưới tại $x_0 \in X$. Khi đó, có dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} \inf f(x_n) < f(x_0)$. Ta chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho tồn tại $k \in \mathbb{N}$ để $f(x_n) \leqslant f(x_0) - \varepsilon (\forall n > k)$. Xét tập mức $L = \{x \in X \,|\, f(x) \leqslant f(x_0) - \varepsilon\}$. Dễ thấy rằng $x_n \in L, \forall n > k$. Do L là tập đóng theo giả thiết nên $x_0 \in L$. Tức là, $f(x_0) \leqslant f(x_0) - \varepsilon$(vô lý). Vậy f là hàm nửa liên tục dưới trên X □

Mệnh đề 1.1.5. [1] *Cho hàm $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới trên tập compact X. Khi đó f đạt cực tiểu trên X.*

Chứng minh. Đặt $\alpha = \inf\{f(x) \,|\, x \in X\}$. Khi đó có một dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$. Do X compact, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\{x_n\}$ hội tụ tới $x_0 \in X$. Vì f nửa liên tục dưới nên $\alpha = \lim\limits_{x_n\to x_0} \inf f(x_n) \geqslant f(x_0)$. Ta có $f(x_0) \in \mathbb{R}$ nên $\alpha > -\infty$, nhưng $x_0 \in X$ nên $f(x_0) \geqslant \alpha$. Vậy $f(x_0) = \alpha = \inf\limits_{x\in X} f(x)$, hay $f(x)$ đạt cực tiểu trên X □

Nếu tập X chỉ đóng mà không compact thì nói chung một hàm f nửa liên tục dưới trên Xcó thể không đạt cực tiểu trên X. Tuy nhiên, trong trường hợp hữu hạn chiều ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.1.6. [1] *Nếu $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ hàm nửa liên tục dưới trên một tập đóng X trong không gian hữu hạn chiều mà bức trên X thì f đạt cực tiểu trên trên tập ấy.*

Nhắc lại rằng hàm f được gọi là bức trên một tập X nếu $f(x) \to +\infty$ khi $x \in X, \|x\| \to +\infty$.

Chứng minh. Lấy $a \in$ X. Ta có tập mức $D = \{x \in X \,|\, f(x) \leqslant f(a)\}$ là đóng theo Mệnh đề 1.1.4. Giả sử D không bị chặn thì có một dãy $\{x_n\} \subset X$, với $f(x_n) \leqslant f(a)$ và $\|x_n\| \to +\infty$. Do f bức trên X nên $f(x_n) \to +\infty$, mâu thuẫn với $f(x_n) \leqslant f(a)$. Vậy D compact (vì một tập đóng, giới nội trong không gian hữu hạn chiều là một tập compact). Theo Mệnh đề 1.1.5, f có cực tiểu trên D, cực tiểu này cũng là cực tiểu trên X. $\square$

Khi X không compact, hoặc f không thỏa mãn điều kiện bức thì hàm f có thể không đạt cực tiểu. Ta có các ví dụ sau:

Ví dụ 1.1.7. Xét hàm $f : X = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = \frac{1}{x}$. Ta có X không compact và f không đạt cực tiểu trên X.

Ví dụ 1.1.8. Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = e^x$. Ta có f không thỏa mãn điều kiện bức trên $\mathbb{R}$ và f không đạt cực tiểu trên $\mathbb{R}$.

1.2. Nguyên lý biến phân Ekeland cổ điển.

Khi X là không gian mêtric đầy đủ, ta có thể làm nhiễu hàm f để có một hàm đạt giá trị cực tiểu trên X. Điều đó được thể hiện qua định lý sau:

Định lý 1.2.1. [*10*] *(Nguyên lý biến phân Eleland cổ điển)*

Cho (X,d) *là một không gian mêtric đầy đủ.* $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *là hàm số nửa liên tục dưới, bị chặn dưới trong* X *. Cho* $\varepsilon > 0$ *và* $x_\varepsilon \in X$ *thỏa mãn*

$$f(x_\varepsilon) \leqslant \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon$$

Khi đó, với số thực $\lambda > 0$ *cho trước, tồn tại* $x^* \in X$ *sao cho*

(i) $f(x^*) \leqslant f(x_\varepsilon)$;

(ii) $d(x^*,x_\varepsilon) \leqslant \lambda$;

(iii) $f(x^*) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x,x^*), \forall x \neq x^*$.

Chú ý 1.2.2. Điểm x_ε trong định lý trên được gọi là $\varepsilon-$ xấp xỉ cực tiểu của hàm $f(x)$ trên X.

Để chứng minh định lý 1.2.1 ta xét một quan hệ thứ tự "$\leqslant$" trong không gian tích $X \times \mathbb{R}$ như sau: Cho $\alpha > 0$,

$$(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_2 - y_1 + \alpha d(x_1, x_2) \leqslant 0. \quad (1.2.1)$$

Hiển nhiên quan hệ "$\leqslant$" có tính phản xạ .

Giả sử ta có $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ và $(x_2, y_2) \leqslant (x_1, y_1)$. Theo định nghĩa của quan hệ "$\leqslant$" ta có

$$d(x_1, y_1) \leqslant \frac{y_1 - y_2}{\alpha} \text{ và } d(x_2, x_1) \leqslant \frac{y_2 - y_1}{\alpha}. \quad (1.2.2)$$

Do đó, 2d$(x_1, x_2) \leqslant 0$. Suy ra $x_1 = x_2$.

Từ $(1.2.2)$ ta có $y_1 \geqslant y_2$ và $y_2 \geqslant y_1$. Vậy $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, hay quan hệ "$\leqslant$" có tính phản đối xứng.

Tiếp theo, ta chứng minh quan hệ "$\leqslant$" có tính chất bắc cầu. Giả sử rằng $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ và $(x_2, y_2) \leqslant (x_3, y_3)$. Từ $(1.2.1)$ ta có

$$d(x_1, y_1) \leqslant \frac{y_1 - y_2}{\alpha} \text{ và } d(x_2, x_3) \leqslant \frac{y_2 - y_3}{\alpha}.$$

Vậy $d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \leqslant \frac{y_1 - y_3}{\alpha}$. Do $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$, nên ta có: $d(x_1, x_3) \leqslant \frac{y_1 - y_3}{\alpha}$. Suy ra $(x_1, y_1) \leqslant (x_3, y_3)$, tức là quan hệ "$\leqslant$" có tính chất bắc cầu.

Ta xét bổ đề sau sẽ được dùng trong chứng minh định lý 1.2.1 :

Bổ đề 1.2.3. *Cho S là một tập con đóng của $X \times \mathbb{R}$ sao cho*

$$\exists m \in \mathbb{R} : (x, y) \in S \Rightarrow y \geqslant m.$$

Khi đó, với mỗi $(x_1, y_1) \in S$, tồn tại phần tử $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$ sao cho $(x_1, y_1) \leqslant (\bar{x}, \bar{y})$ và $(\bar{x}, \bar{y})$ là phần tử cực đại trong S theo quan hệ thứ tự "$\leqslant$" , tức là, nếu $(x, y) \in S$ và $(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant (x, y)$ thì $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$.