ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG MINH GIANG

VỀ TÍNH CHẤT COFINITE CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

Mã số: 60.46.05

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN VĂN HOÀNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Công trình được hoàn thành tại

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN VĂN HOÀNG

Phản biện 1: GS. TSKH. PHÙNG HỒ HẢI

Phản biện 2: PGS. TS. LÊ THANH NHÀN

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận văn họp tại

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Ngày 16 tháng 10 năm 2011

Có thể tìm hiểu tại

Thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành trong khóa 17 đào tạo Thạc sĩ của trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Hoàng, Trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Khoa Sau đại học, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên; Trường THPT Cao Lộc, sở GD&ĐT - Tỉnh Lạng Sơn đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã động viên, ủng hộ tôi cả về vật chất và tinh thần để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

Mở đầu

Cho R là vành giao hoán Noether, I là iđêan của R, và K là $R-$môđun. K được gọi là môđun $I-$cofinite nếu $\mathrm{Supp}(K) \subseteq V(I)$ và $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, K)$ là hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$ (xem [7]). Tính cofinite cho các môđun được giới thiệu bởi Hartshorne trên một bài báo đăng trên tạp chí nổi tiếng Inventiones Mathematica năm 1970, ở đó ông chứng minh rằng $H^j_I(M)$ là $I-$cofinite với mọi j nếu R là vành chính quy địa phương đầy đủ và I là iđêan chính hoặc I là iđêan nguyên tố chiều bằng 1. Cụ thể là kết quả sau:
Định lý. (Hartshorne [7]) *Nếu R là vành chính quy địa phương đầy đủ, M là $R-$môđun hữu hạn sinh và I là iđêan của R thỏa mãn một trong hai điều kiện sau*

(a) I là iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ sao cho $\dim R/\mathfrak{p} = 1$;

(b) I là iđêan chính khác không.

thì $H^j_I(M)$ là môđun $I-$cofinite với mọi j.
Một khoảng thời gian sau đó, kết quả (a) của Hartshorne đã được mở rộng tới một số trường hợp vành R giao hoán địa phương Noether tổng quát hơn: I không nhất thiết là iđêan nguyên tố, nhưng vẫn có điều kiện $\dim R/I = 1$. C. Huneke-J. Koh [8] chứng minh kết quả này khi R là miền nguyên Gorenstein địa phương đầy đủ. Tiếp đến, Delfino [4] đã mở rộng kết quả tới miền nguyên địa phương đầy đủ chứa một trường. Đến năm 1997, Delfino-T. Marley [5], và K. Yoshida [19] đã chứng minh được các kết quả đó vẫn đúng cho iđêan I có $\dim R/I = 1$ trong vành địa phương

Noether tùy ý. Gần đây nhất, năm 2009, K. Bahmanpour-N. Naghipour [2] đã mở rộng kết quả tới trường hợp R là vành giao hoán Noether (không nhất thiết địa phương). Cụ thể là định lý sau đây:

Định lý 0.0.1. ([2, Định lý 2.6]) *Giả sử R là vành giao hoán Noether, I là iđêan của R, và M là $R-$môđun hữu hạn sinh. Cho t là số nguyên không âm sao cho $\dim \operatorname{Supp}(H_I^i(M)) \leq 1$ với mọi $i < t$. Khi đó các phát biểu sau là đúng:*

(i) $R-$môđun $H_I^i(M)$ là $I-$cofinite với mọi $i < t$;

(ii) $R-$môđun $\operatorname{Hom}_R(R/I, H_I^t(M))$ là hữu hạn sinh.

Bên cạnh những bài toán mở rộng kết quả (a) của Hartshorne như đã nêu trên, người ta cũng quan tâm đến việc mở rộng kết quả (b) của Hartshorne. Năm 1998, K. Kawasaki [9] đã chứng minh được kết quả sau:

Định lý 0.0.2. [9, Định lý 1] *Cho R là vành giao hoán Noether, $I = Rx$ là iđêan chính, và M là $R-$môđun hữu hạn sinh. Khi đó $\operatorname{Ext}_R^i(R/I, H_I^j(M))$ là $R-$môđun hữu hạn sinh với mọi i, j.*

Lưu ý rằng trong trường hợp $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether, người ta thấy rằng một môđun là $\mathfrak{m}-$cofinite nếu và chỉ nếu nó là môđun Artin. Mặt khác, L. Melkersson [12] đã chứng minh được $H_I^n(M)$ là môđun Artin với mọi iđêan I và M là $R-$môđun hữu hạn sinh chiều n. Từ đó, như hệ quả hiển nhiên, ta suy ra rằng $H_I^n(M)$ là môđun $\mathfrak{m}-$cofinite. Sau đó, Delfino-Marley [5] chứng minh được kết quả mạnh hơn như sau:

Định lý 0.0.3. ([5, Định lý 3]) *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether, I là iđêan của R và M là $R-$môđun hữu hạn sinh chiều n. Khi đó $H_I^n(M)$ là $I-$cofinite.*

Mục đích của luận văn này là trình bày chi tiết lại các chứng minh của các Định lý 0.0.1, 0.0.2, 0.0.3 như đã nêu trên, các chứng minh này dựa trên bốn bài báo chính là [1], [2], [5], [9]. Luận văn được chia làm 3 chương. Chương 1 trình bày những kiến thức cơ sở cần thiết được dùng để chứng minh các kết quả ở các chương sau. Một số kiến thức được trình bày ở đây là: môđun Ext, biểu diễn thứ cấp của môđun Artin, môđun đối đồng điều địa phương, Định lý triệt tiêu Grothendieck, đối ngẫu Matlis. Chương 2 dành để trình bày chứng minh chi tiết cho Định lý 0.0.1. Bên cạnh đó một số hệ quả quan trọng của Định lý 0.0.1 cũng được trình bày. Chương 3 sẽ chứng minh chi tiết các Định lý 0.0.2 và 0.0.3.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhắc lại một số kiến thức cơ bản cần thiết để sử dụng trong các chương về sau. Một số kiến thức được trình bày ở đây là: môđun Ext, biểu diễn thứ cấp của môđun Artin, môđun đối đồng điều địa phương, đối ngẫu Matlis, Định lý triệt tiêu Grothendieck.

1.1 Hàm tử mở rộng và hàm tử xoắn

Các kiến thức của mục này được trích theo cuốn sách [15].

Định nghĩa 1.1.1. Cho M, N là các $R-$môđun và $n \geq 0$ là một số tự nhiên. Môđun dẫn xuất phải thứ n của hàm tử $\mathrm{Hom}(-, N)$ ứng với M được gọi là môđun *mở rộng thứ n* của M và N và được kí hiệu là $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$. Cụ thể, để xây dựng $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ ta lấy một giải xạ ảnh của M

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{u_2} P_1 \xrightarrow{u_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}(-, N)$ vào dãy khớp trên ta có đối phức

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{u_1^*} \mathrm{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{u_2^*} \mathrm{Hom}(P_2, N) \longrightarrow \ldots.$$

Khi đó $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = \mathrm{Ker}\, u^*_{n+1}/\,\mathrm{Im}\, u^*_n$ là môđun đối đồng điều thứ n của đối phức trên (môđun này không phụ thuộc vào việc chọn giải xạ ảnh của M).

Lưu ý rằng người ta cũng có thể xây dựng $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$ như sau: lấy giải nội xạ của N

$$0 \to N \xrightarrow{\alpha} E^0 \xrightarrow{v^0} E^1 \xrightarrow{v^1} ... \xrightarrow{v^{n-1}} E^n \xrightarrow{v^n} ...$$

Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}(M,-)$ vào dãy trên ta được phức

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,E^0) \xrightarrow{v_*^0} \mathrm{Hom}(M,E^1) \xrightarrow{v_*^1} \mathrm{Hom}(M,E^2) \to ...$$

$$... \xrightarrow{v_*^{n-1}} \mathrm{Hom}(M,E^n) \xrightarrow{v_*^n} ...$$

Khi đó $\mathrm{Ext}_R^n(M,N) = \mathrm{Ker}\, v_*^n / \mathrm{Im}\, v_*^{n-1}$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho M, N là các R-môđun và $n \geq 0$ là một số tự nhiên. Môđun dẫn xuất trái thứ n của hàm tử $-\otimes N$ ứng với M được gọi là môđun *xoắn thứ* n của M và N và được kí hiệu là $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$. Cụ thể, để xây dựng Tor_R^n ta lấy một dải xạ ảnh của M

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{v_2} P_1 \xrightarrow{v_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

Tác động hàm tử $-\otimes N$ vào dãy khớp trên ta có phức

$$\ldots \longrightarrow P_2 \otimes N \xrightarrow{v_2^*} P_1 \otimes N \xrightarrow{v_1^*} P_0 \otimes N \longrightarrow 0.$$

Khi đó $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) = \mathrm{Ker}\, v_n^* / \mathrm{Im}\, v_{n+1}^*$ là môđun đồng điều thứ n của phức trên (môđun này không phụ thuộc vào việc chọn giải xạ ảnh của M).

Sau đây là một số tính chất cơ sở của các môđun Ext và Tor được dùng trong luận văn.

Mệnh đề 1.1.3.

(a) $\mathrm{Ext}_R^0(M,N) \cong \mathrm{Hom}(M,N)$ *và* $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) \cong M \otimes N$.

(b) Nếu M hoặc N là xạ ảnh thì $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) = 0$ *với mọi* $n \geq 1$.

(c) Nếu M là xạ ảnh hoặc N là nội xạ thì $\mathrm{Ext}_R^n(M,N) = 0$ *với mọi* $n \geq 1$.

(d) Nếu $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ *là dãy khớp ngắn thì tồn tại các đồng cấu nối* $\operatorname{Ext}_R^n(M, N'') \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N')$ *với mỗi* $n \geq 0$ *sao cho ta có dãy khớp dài*

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N') \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N'') \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M, N') \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M, N'') \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^2(M, N') \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

(e) Nếu $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *là dãy khớp ngắn thì tồn tại các đồng cấu nối* $\operatorname{Ext}_R^n(M', N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M'', N)$ *với mỗi* $n \geq 0$ *sao cho ta có dãy khớp dài*

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M', N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M'', N) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M', N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^2(M'', N) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Hệ quả 1.1.4. *Nếu* M, N *hữu hạn sinh thì* $\operatorname{Ext}_R^n(M, N)$ *và* $\operatorname{Tor}_n^R(M, N)$ *là hữu hạn sinh với mọi* n.

Kết quả dưới đây cho ta tính chất giao hoán giữa môđun Ext, Tor với hàm tử địa phương hóa và sự tương đương giữa hai hàm tử Ext và Tor trên vành địa phương đầy đủ.

Mệnh đề 1.1.5. *Nếu* S *là tập đóng nhân của* R *thì ta có các đẳng cấu*

$$S^{-1}(\operatorname{Ext}_R^n(M, N)) \cong \operatorname{Ext}_{S^{-1}R}^n(S^{-1}M, S^{-1}N),$$

$$S^{-1}(\operatorname{Tor}_n^R(M, N)) \cong \operatorname{Tor}_n^{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N),$$

trong đó S^{-1} *là hàm tử địa phương hóa. Đặc biệt,*

$$(\operatorname{Ext}_R^n(M, N))_{\mathfrak{p}} \cong \operatorname{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^n(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}),$$

$$(\operatorname{Tor}_n^R(M, N))_{\mathfrak{p}} \cong \operatorname{Tor}_n^{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$$

với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ *của* R.