ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG THIỆN CHÍ

MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA ĐA TẠP HYPERBOLIC HẦU PHỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 60.46.01

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS PHẠM VIỆT ĐỨC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Mở đầu

Đa tạp hầu phức là tổng quát hoá một cách tự nhiên của đa tạp phức. Nghiên cứu lớp đa tạp phức hay đa tạp hầu phức hiện nay đang là vấn đề hấp dẫn trong lĩnh vực Giải tích phức.

Khái niệm về tính hyperbolic Kobayashi gần đây đã được mở rộng trên đa tạp hầu phức bởi nhiều tác giả. Một trong những vấn đề chính thu hút sự quan tâm của các tác giả là những đặc trưng về tính hyperbolic Kobayashi của đa tạp hầu phức.

Mục đích chính của luận văn này là khảo sát một số tiêu chuẩn cho tính hyperbolic của đa tạp hầu phức. Đây là các tiêu chuẩn mới gần đây được chứng minh bởi Haggui - Khalfallah [H-Kh] và Dabalme [D].

Luận văn gồm có hai chương.

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về đa tạp hầu phức, không gian các dạng vi phân và ánh xạ đạo hàm, về giả khoảng cách Kobayashi trên đa tạp hầu phức và giả metric vi phân Royden - Kobayashi trên đa tạp hầu phức.

Chương 2 trình bày chi tiết một số tiêu chuẩn cho tính hyperbolic. Trong chương này, trước tiên trình bày chứng minh định lý Brody, đây là một đặc trưng cho tính hyperbolic của đa tạp hầu phức compact. Tiếp theo luận văn đưa ra một số tiêu chuẩn cho tính hyperbolic của đa tạp hầu phức. Cuối cùng luận văn trình bày mối liên hệ giữa tính hyperbolic với tính chất Δ^*-thác triển trên đa tạp hầu phức compact.

Luận văn có đề ra một số hướng nghiên cứu phát triển để độc giả có thể tham khảo.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình, chu đáo của PGS.TS Phạm Việt Đức. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy của mình, người đã chỉ bảo và hướng dẫn tôi trong suốt thời gian tôi học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới toàn thể các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội đã tận tình giảng dạy động viên tôi trong suốt thời gian học tập. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Khoa Toán, Khoa Sau Đại học, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Sở GD - ĐT Sơn La, những bạn bè đồng nghiệp và đặc biệt là người thân trong gia đình đã động viên, ủng hộ tôi về mọi mặt để tôi có thể hoàn thành khóa học của mình.

Trong quá trình làm luận văn chắc không thể tránh khỏi những sai sót, rất mong độc giả đóng góp ý kiến. Tôi hy vọng rằng bản thân có điều kiện tiếp tục đi sâu nghiên cứu những vấn đề đã được đặt ra trong luận văn.

Thái nguyên, tháng 8 năm 2011

TÁC GIẢ

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Đa tạp hầu phức

1.1.1. Cấu trúc phức

Giả sử V là $\mathbb{R}$-không gian vectơ và $J : V \longrightarrow V$ là $\mathbb{R}$-đẳng cấu. J được gọi là một *cấu trúc phức* trên V nếu

$$J^2 := J \circ J = -Id.$$

Giả sử J là cấu trúc phức trên $\mathbb{R}$-không gian vectơ V, khi đó ta có thể xây dựng V thành $\mathbb{C}$-không gian vectơ bằng cách đặt

$$(\alpha + i\beta)v := \alpha v + \beta J(v) = \alpha v + \beta Jv.$$

Giả sử V là $\mathbb{C}$-không gian vectơ có cơ sở là $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Xem V là $\mathbb{R}$-không gian vectơ $V_{\mathbb{R}}$, xét

$$J : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$$v \longmapsto Jv = iv.$$

Khi đó J là cấu trúc phức trên $V_{\mathbb{R}}$ và không gian phức mà nó cảm sinh ra trùng với không gian vectơ phức V ban đầu.

1.1.2. Nhận xét

$V_{\mathbb{R}}$ có $\mathbb{R}$-cơ sở là $\{v_1, v_2, ..., v_n, Jv_1, Jv_2, ..., Jv_n\}$.

1.1.3. Ví dụ

a)

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, ..., z_n) : z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}\}$$
$$\cong \mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n)\}.$$

$J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ cho bởi:

$$J((x_1, y_1, ..., x_n, y_n)) = (-y_1, x_1, ..., -y_n, x_n).$$

Khi đó J là cấu trúc phức trên $\mathbb{R}^{2n}$.

b) Giả sử M là đa tạp phức m chiều. Khi đó nó cảm sinh ra M_0 là đa tạp thực nhẵn $2m$ chiều.

Gọi $T_x(M_0)$ là không gian tiếp xúc thực của M_0 tại x và gọi $T_x(M)$ là không gian tiếp xúc phức của M tại x.

Giả sử (U, h) là một bản đồ địa phương của M quanh x.

Ta có

$$h : U \longrightarrow U' \subset \mathbb{C}^m$$

$$h = (h_1, h_2, ..., h_n), \text{ cảm sinh ra } \widetilde{h} : U \longrightarrow \mathbb{R}^{2m} \text{ cho bởi}$$

$$\widetilde{h}(x) = (\mathrm{Re}h_1(x), \mathrm{Im}h_1(x), ..., \mathrm{Re}h_m(x), \mathrm{Im}h_m(x)).$$

Ta có $(U, \widetilde{h})$ là một bản đồ địa phương của M_0 quanh x.

Gọi

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}\bigg|_x, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}\bigg|_x \right\} \text{ là } \mathbb{C}\text{-cơ sở của } T_x(M).$$

Nó cảm sinh ra

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x, \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_x \right\}_{j=1}^{n} \text{ là } \mathbb{R}\text{-cơ sở của } T_x(M_0).$$

Xét

$$J : T_x(M_0) \longrightarrow T_x(M_0)$$

cho bởi

$$v = \alpha_1 . \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_x + \beta_1 . \frac{\partial}{\partial y_1}\bigg|_x + ... + \alpha_n . \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_x + \beta_n . \frac{\partial}{\partial y_n}\bigg|_x \in T_x(M_0)$$

thì

$$J_v = (-\beta_1)\, \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_x + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\bigg|_x + ... + (-\beta_n)\, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_x + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y_n}\bigg|_x .$$

Khi đó J là cấu trúc phức trên $T_x(M_0)$.

1.1.4. Cấu trúc hầu phức

Giả sử M là đa tạp vi phân $2n$ chiều. Gọi $\pi : TM \to M$ là phân thớ tiếp xúc thực.

Giả sử $J : T(M) \to T(M)$ là một tự đẳng cấu của $T(M)$ liên kết với ánh xạ đồng nhất trên M thỏa mãn

$$\forall x \in M : J_x = J\bigg|_{T_x(M)} : T_x(M) \to T_x(M)$$

là cấu trúc phức trên $\mathbb{R}$-không gian vectơ $T_x(M)$.

Khi đó J được gọi là *cấu trúc hầu phức* trên M.

1.1.5. Đa tạp hầu phức

(M, J) được gọi là một *đa tạp hầu phức* nếu M là một đa tạp vi phân chẵn $2n$ chiều được trang bị một cấu trúc hầu phức J.

1.2. Không gian các dạng vi phân và ánh xạ đạo hàm

1.2.1. Định nghĩa

Giả sử M là đa tạp vi phân m chiều.
Đặt
$$T(M)_{\mathbb{C}} = T(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$
Tương tự ta định nghĩa
$$T^*(M)_{\mathbb{C}} = T^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$
Từ đó ta định nghĩa tích ngoài
$$\Lambda T^*(M)_{\mathbb{C}} \text{ và } \varepsilon^r(M)_{\mathbb{C}} = \varepsilon(M, \Lambda^r T^*(M)_{\mathbb{C}}).$$

Gọi $\varepsilon^r(M)$ là không gian các dạng vi phân bậc r với giá trị phức. Tức là với $\varphi \in \varepsilon^r(M)$, ta có
$$\varphi(x) = {\sum_{|I|=r}}' \varphi_I(x) dx_I$$
trong đó φ_I là hàm giá trị phức và
$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m} = {\sum_{|I|=r}}'.$$
Khi đó ta có dãy
$$\varepsilon^0(M) \xrightarrow{d} \varepsilon^1(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \varepsilon^m(M) \longrightarrow 0 \text{ với } d^2 = 0.$$
Giả sử (M, J) là đa tạp hầu phức, khi đó
$$J : T_x(M)_{\mathbb{C}} \to T_x(M)_{\mathbb{C}}$$
là đẳng cấu trên phân thớ vectơ phức $T(M)_{\mathbb{C}}$. Ta đặt