ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

----------&&----------

NGÔ VĂN GIANG

TÍNH TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : Toán giải tích
Mã số : 60 46 01

Thái Nguyên, năm 2011

Mục lục

Một số ký hiệu

- $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$: tập các số thực.

- $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$: tập các số thực không âm.

- $\mathbb{R}^n$: không gian vectơ tuyến tính thực n chiều với ký hiệu tích vô hướng là $< .,. >$ và chuẩn vectơ là $||\,.\,||$.

- $\mathbb{C}([a;b], \mathbb{R}^n)$: tập tất cả các hàm liên tục trên $[a;b]$ và nhận giá trị trên $\mathbb{R}^n$.

- $C(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \mid u$ liên tục$\}$.

- $C(\bar{U}) = \{u \in C(U) \mid u$ liên tục đều$\}$.

- $C^k(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \mid u$ là liên tục khả vi k lần$\}$.

- $C^k(\bar{U}) = \{u \in C^k(U) \mid D^\alpha u$ là liên tục đều với mọi $|\alpha| \leq k\}$.

Do đó: nếu $u \in C^k(\bar{U})$ thì $D^\alpha u$ thác triển liên tục tới $\bar{U}$ với mọi đa chỉ số α, $|\alpha| \leq k$.

- $L_2([a,b], \mathbb{R}^m)$: tập các hàm khả tích bậc hai trên $[a,b]$ và lấy giá trị trong $\mathbb{R}^m$.

- $C^\infty(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \mid u$ khả vi vô hạn$\} = \cap_{k=0}^\infty C^k(U)$, $C^\infty(\bar{U}) = \cap_{k=0}^\infty C^k(\bar{U})$.

- $C_c(U)$, $C_c^k(U), ...,$, ký hiệu các hàm trong $C(U)$, $C^k(U), ...,$ với giá compắc.

- $L^p(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \mid u$ là đo được Lebesgue, $\|u\|_{L^p(U)} < \infty\}$.

Trong đó

$$\|u\|_{L^p(U)} = (\int_U |u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$(1 \leq p < \infty)$.

- $L^\infty(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \mid u$ là đo được lebesgue, $\|u\| < \infty\}$.

Trong đó

$$\|u\|_{L^p(U)} = ess \sup_U |u|.$$

- $L^p_{loc}(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \mid u \in L^p(V)$, với mọi $V \subset\subset U\}$.
- $H^k(U), W^k_p\, (k = 1, 2, 3...)$ ký hiệu các không gian Sobolev.

Mở đầu

Hệ phương trình Navier-Stokes lần đầu tiên được nghiên cứu vào năm 1822, cho đến nay đã có rất nhiều công trình nghiên cứu viết về phương trình này tuy nhiên những hiểu biết của ta về phương trình này còn quá khiêm tốn. Muốn hiểu được hiện tượng sóng dập sau đuôi con tàu chạy trên mặt nước hay hiện tượng hỗn loạn của không khí sau đuôi máy bay khi bay trên bầu trời...chúng ta đều phải tìm cách giải hệ phương trình Navier-Stokes. Do nhu cầu của Khoa học và Công nghệ mà việc nghiên cứu hệ phương trình Navier-Stokes càng trở nên thời sự và cấp thiết.

Hệ phương trình Navier-Stokes mô tả sự chuyển động của chất lỏng trong $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ hoặc $n = 3$). Ta giả thiết rằng chất lỏng không nén được lấp đầy $\mathbb{R}^n$. Ta đi tìm một hàm vectơ vận tốc $u(x,t) = (u_i(x,t)), i = 1, 2, ..., n$ và hàm áp suất $p(x,t)$, xác định tại vị trí $x \in \mathbb{R}^n$ và thời gian $t > 0$, thỏa mãn hệ phương trình Navier-Stokes như sau:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \triangle u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t)$$

$$(x \in \mathbb{R}^n, t > 0, i = 1, 2, ..., n), u = (u_1, u_2, ..., u_n),$$

$$div\, u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \, (x \in \mathbb{R},\, t > 0).$$

Với điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = u^o(x).$$

Ở đây, hàm vectơ $u^o(x)$ là hàm khả vi vô hạn với $div\, u^o = 0$, $f_i(x,t)$ là những hàm đã biết biểu thị các lực tác động bên ngoài, ν là một hệ số dương.

Luận văn gồm phần mở đầu, ba chương và tài liệu tham khảo. Cụ thể là

Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes.

Chương 3: Nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier-stokes.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS. TSKH Nguyễn Minh Trí, người đã tận tình hướng dẫn, tạo mọi điều kiện giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Sau đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán – Trường ĐH Sư phạm – ĐH Thái Nguyên cùng các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy khoá học, xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các bạn cùng lớp cao học Toán K17 đã luôn quan tâm, động viên và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và làm luận văn.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này trình bày sơ bộ về không gian Sobolev, một số bất đẳng thức cơ bản, phương trình Stokes, toán tử Stokes và một số bất đẳng thức về số hạng phi tuyến.

1.1 Không gian Sobolev

Trong phần này tôi trình bày một số khái niệm và kết quả liên quan đến không gian Sobolev, phần chứng minh chi tiết có thể xem trong [5].

1.1.1 Đạo hàm yếu

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử $u, v \in L^1_{loc}(U)$ và α là một đa chỉ số. Ta nói rằng v là đạo hàm yếu cấp α của u nếu

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx$$

đúng với mọi hàm thử $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Kí hiệu $D^\alpha u = v$.

Bổ đề 1.1.2. *(Tính duy nhất của đạo hàm yếu). Một đạo hàm yếu cấp α của u nếu tồn tại thì được xác định một cách duy nhất (sai khác trên* *tập có độ đo không).*

1.1.2 Không gian Sobolev

Định nghĩa 1.1.3. Cố định $1 \leq p \leq \infty$ và cho k là số nguyên không âm. Không gian Sobolev W_p^k là tập tất cả các hàm khả tổng địa phương $u : U \to \mathbb{R}$ sao cho với mỗi đa chỉ số α, $|\alpha| \leq k$, đạo hàm yếu $D^\alpha u$ tồn tại và thuộc $L^p(U)$.

Chú ý 1.1.4. Nếu $p = 2$ ta có

$$H^k(U) = W_2^k(U) \quad (k = 1, 2, ...)$$

là không gian Hilbert. Chú ý rằng $H^0(U) = L^2(U)$.

Định nghĩa 1.1.5. Nếu $u \in W_p^k(U)$, ta định nghĩa chuẩn của nó là

$$\|u\|_{W_p^k} := (\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

và

$$\|u\|_{W_p^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} ess \sup_U |D^\alpha u| \quad (p = \infty).$$

Định nghĩa 1.1.6. Bao đóng của $C_c^\infty(U)$ trong $H^k(U)$ được kí hiệu là $H_0^k(U)$.

Như vậy, ta coi $H_0^k(U)$ như là tập các hàm $u \in H^k(U)$ sao cho $D^\alpha u = 0$ trên ∂U với mọi $|\alpha| \leq k - 1$.

Chúng ta ký hiệu $|u| = \|u\|_{L^2(\Omega)}$. Chuẩn Dirichlet

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega \sum_{i=1}^n |D_i u|^2 dx)^{1/2}$$

sẽ được ký hiệu là $\|u\|$.

1.1.3 Không gian H^{-1}

Định nghĩa 1.1.7. Không gian đối ngẫu của $H_0^1(U)$ được kí hiệu là $H^{-1}(U)$, tức là $f \in H^{-1}(U)$ nếu f là một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên $H_0^1(U)$.

Định nghĩa 1.1.8. Nếu $f \in H^{-1}(U)$ thì

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \sup\{< f, u > |u \in H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1\}.$$

Ta viết $<, >$ để kí hiệu giá trị của $f \in H^{-1}(U)$ trên $u \in H_0^1(U)$.

Định lý 1.1.9. *(Cấu trúc của H^{-1})*

(i) Giả thiết $f \in H^{-1}(U)$. Khi đó tồn tại các hàm f^0, f^1, ..., f^n trong $L^2(U)$ sao cho

$$< f, v >= \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} dx \quad (v \in H_0^1(U)).$$

(ii) Hơn nữa,

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf\{(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx)^{1/2} \,|\, f$$

thỏa mãn (i) với f^0, ..., $f^n \in L^2(U)$}.

1.1.4 Không gian phụ thuộc thời gian

Định nghĩa 1.1.10. Không gian

$$L^p(0, T; X)$$

gồm tất cả các hàm đo được $u : [0, T] \to X$ với

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := (\int_0^T \|u(t)\|^p dt)^{1/p} < \infty$$