ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Hữu Việt

ÁP DỤNG PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE GIẢI BÀI TOÁN BIÊN-BAN ĐẦU HỖN HỢP CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS Hà Tiến Ngoạn

Thái Nguyên - 2011

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS - TS Hà Tiến Ngoạn. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và thành kính nhất đến thầy. Thầy không chỉ hướng dẫn em nghiên cứu khoa học mà thầy còn thông cảm tạo mọi điều kiện động viên em trong suốt quá trình làm luận văn.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các các thầy cô giáo trong Khoa Toán, Khoa Sau Đại học - Đại học Sư phạm Thái Nguyên và các thầy cô giáo Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã dạy bảo em tận tình trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K17 Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới Sở GD - ĐT Tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp Trường THPT Đồng Yên - Bắc Quang - Hà Giang đã tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2011

Học viên

Nguyễn Hữu Việt

Mở đầu

Luận văn trình bày tổng quan cơ sở phép biến đổi Laplace đối với các hàm số một biến t xác định trên nửa trục dương, có độ tăng cấp mũ hữu hạn và phụ thuộc vào tham số vectơ x.

Trên cơ sở đó, dùng phép biến đổi Laplace như một công cụ để luận văn trình bày việc nghiên cứu tính giải được và tính duy nhất nghiệm của bài toán biên-ban đầu hỗn hợp của phương trình parabolic tuyến tính cấp hai, khi hệ số của phương trình không phụ thuộc vào biến thời gian t.

Nội dung luận văn được viết chủ yếu dựa trên tài liệu [5]. Bố cục của luận văn gồm 2 chương:

- Chương 1 của Luận văn trình bày phép biến đổi Laplace đối với hàm số thông thường, nhắc lại các khái niệm về hàm suy rộng, hàm suy rộng nhận giá trị trong không gian Banach và phép biến đổi Laplace đối với hàm suy rộng nhận giá trị trong không gian Banach.

- Chương 2 của Luận văn trình bày bài toán biên-ban đầu hỗn hợp cho phương trình parabolic tuyến tính cấp hai có các hệ số không phụ thuộc vào biến thời gian t, ứng dụng của biến đổi Laplace để biểu diễn nghiệm của bài toán và một số ví dụ áp dụng.

Chương 1
Phép biến đổi Laplace

1.1. Phép biến đổi Laplace đối với hàm số thông thường

1.1.1. Định nghĩa hàm gốc

Định nghĩa 1.1. *Hàm một biến thực $f(t)$ được gọi là hàm gốc nếu thoả mãn ba điều kiện sau :*

1) $f(t) = 0$ với mọi $t < 0$. Điều này được đặt ra vì trong thực tế t thường là biến thời gian.

2) $f(t)$ liên tục từng khúc trong miền $t \geq 0$.

Điều này có nghĩa là nếu lấy một khoảng (a,b) bất kì trên nửa trục thực $t \geq 0$, bao giờ cũng có thể chia nó thành một số hữu hạn các khoảng nhỏ, sao cho trong mỗi khoảng nhỏ $f(t)$ liên tục và tại mút của mỗi khoảng nhỏ nó có giới hạn một phía.

3) $f(t)$ không tăng nhanh hơn hàm mũ khi $t \to +\infty$. Nghĩa là tồn tại $M > 0, \sigma_0 > 0$ sao cho

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}, \qquad \forall t > 0, \tag{1.1}$$

trong đó σ_0 được gọi là chỉ số tăng của $f(t)$.
Rõ ràng σ_0 là chỉ số tăng thì mọi số $\sigma_1 > \sigma_0$ cũng là chỉ số tăng.

Ví dụ 1.1. Hàm bước nhảy đơn vị

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

là hàm gốc vì $\eta(t)$ liên tục với mọi $t \geq 0$ và không tăng nhanh hơn hàm mũ với chỉ số tăng $\sigma_0 = 0$.

Ví dụ 1.2. Các hàm sơ cấp cơ bản như $f(t) = t^m$, $f(t) = \sin t$, $f(t) = \cos t$... đều liên tục và không tăng nhanh hơn hàm mũ nhưng vẫn chưa phải là hàm gốc vì không thoả mãn điều kiện 1) của Định nghĩa 1.1.

Tuy nhiên hàm số sau :

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < 0 \\ f(t) & \text{nếu} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

là một hàm gốc.

1.1.2. Định nghĩa phép biến đổi Laplace

Phép biến đổi Laplace (hay còn gọi là toán tử Laplace) được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.2. *Giả sử $f(t)$ là hàm gốc xác định với mọi $t > 0$. Biến đổi Laplace của hàm số $f(t)$ được định nghĩa và ký hiệu là*

$$F(p) = L\{f(t)\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1.2}$$

Định lý 1.1. *Nếu $f(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng σ_0 thì tồn tại biến đổi Laplace*

$$F(p) = L\{f(t)\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

xác định với mọi số phức $p = \sigma + i\tau$ sao cho $\sigma > \sigma_0$ và $\lim\limits_{\mathrm{Re}(p)\to\infty} F(p) = 0$. Hơn nữa hàm biến phức $F(p)$ là giải tích trong miền $\mathrm{Re}(p) > \sigma_0$ với đạo hàm

$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} (-t)e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1.3}$$

Chứng minh. Với mọi $p = \sigma + i\tau$ sao cho $\sigma > \sigma_0$ ta có

$$\left| f(t)\, e^{-pt} \right| \leqslant M e^{(\sigma_0 - \sigma)t},$$

mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{(\sigma_0-\sigma)t} dt$ hội tụ, do đó tích phân $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt$ hội tụ tuyệt đối. Vì vậy tồn tại biến đổi Laplace $F(p)$ và

$$|F(p)| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} |f(t)\, e^{-pt}| dt = \int\limits_0^{+\infty} \left| f(t)\, e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \right| dt = \int\limits_0^{+\infty} |f(t)\, e^{-\sigma t}| dt$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} M e^{(\sigma_0 - \sigma)t} dt = \left. \frac{M e^{(\sigma_0 - \sigma)t}}{\sigma_0 - \sigma} \right|_0^{+\infty} = \frac{M}{\sigma_0 - \sigma}.$$

Ngoài ra $\lim\limits_{\sigma \to \infty} \dfrac{M}{\sigma - \sigma_0} = 0$ suy ra $\lim\limits_{\mathrm{Re}(p) \to \infty} F(p) = 0$.

Tích phân $\int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ hội tụ và tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p} \left(f(t) e^{-pt} \right) dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} (-t) dt$$

hội tụ đều trong miền $\{p | \,\mathrm{Re}(p) \geqslant \sigma_1\}$ với mọi $\sigma_1 > \sigma$ (theo Định lý Weierstrass).

Suy ra hàm ảnh $F(p)$ có đạo hàm

$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p} \left(f(t) e^{-pt} \right) dt$$

tại mọi điểm p thuộc các miền trên.

Vì vậy $F(p)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(p) > \sigma_0$. □

Nhận xét 1.1. Từ Ví dụ 1.2 suy ra các hàm sơ cấp cơ bản như $f(t) = t^m$, $f(t) = \sin t$, $f(t) = \cos t$... đều có biến đổi Laplace $L\{f(t)\eta(t)\}$. Do đó thay vì viết đầy đủ $L\{f(t)\eta(t)\}$ ta có thể viết tắt $L\{f(t)\}$. Chẳng hạn ta viết $L\{\sin t\}$ thay cho $L\{\sin t \eta(t)\}$.

Ví dụ 1.3. Biến đổi Laplace của hàm $f(t) = 1$ là

$$F(p) = L\{1\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

Ví dụ 1.4. Cho hàm $f(t) = t$, biến đổi Laplace của $f(t)$ là

$$F(p) = L\{t\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} t dt = \frac{1}{p^2}$$

Ví dụ 1.5. Cho hàm $f(t) = t^n$, biến đổi Laplace của $f(t)$ là

$$F(p) = L\{t^n\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}t^n dt = \frac{1}{p^{n+1}}$$

Ví dụ 1.6. Hàm $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ có biến đổi Laplace là

$$F(p) = L\{e^{\alpha t}\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}e^{\alpha t} dt = \frac{1}{p - \alpha}$$

Ví dụ 1.7. Hàm $\sin t$ có chỉ số tăng $\sigma_0 = 0$ do đó có biến đổi Laplace là

$$F(p) = L\{\sin t\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t dt.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được

$$F(p) = -\cos t e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} pe^{-pt} \cos t dt$$

$$= 1 - \left(pe^{-pt} \sin t\big|_0^{+\infty}\right) - p^2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t dt.$$

$$\Rightarrow (1 + p^2)F(p) = 1 \Rightarrow F(p) = \frac{1}{1 + p^2}$$

1.1.3. Các tính chất của phép biến đổi Laplace

Tính chất 1.1. *Phép biến đổi Laplace có tính tuyến tính. Nếu $f(t)$ và $g(t)$ có biến đổi Laplace thì $Af(t)+Bg(t)$ cũng có biến đổi Laplace (A, B là các hằng số) và*

$$L\{Af(t) + Bg(t)\}(p) = AL\{f(t)\}(p) + BL\{g(t)\}(p). \tag{1.4}$$

Chứng minh. Gọi $F(p), G(p)$ lần lượt là ảnh của $f(t)$ và $g(t)$ qua phép biến đổi Laplace. Theo định nghĩa

$$L\{Af(t) + Bg(t)\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}[Af(t) + Bg(t)]dt.$$

Do tính chất tuyến tính của tích phân nên ta có

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}[Af(t)+Bg(t)]dt = A\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt + B\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = AF(p)+BG(p).$$

Thay vào trên ta có

$$L\{Af(t)+Bg(t)\}(p) = AF(p)+BG(p).$$

□

Ví dụ 1.8.

$$L\{6+7\sin t\}(p) = 6L\{1\}(p)+7L\{\sin t\}(p) = \frac{6}{s}+\frac{7}{1+s^2}.$$

Tính chất 1.2. *Phép biến đổi Laplace có tính đồng dạng.*
Nếu $F(p) = L\{f(t)\}(p)$ thì với mọi hằng số $\lambda > 0$ ta có

$$L\{f(\lambda t)\}(p) = \frac{1}{\lambda}F(\frac{p}{\lambda}). \tag{1.5}$$

Chứng minh. Theo định nghĩa ta có

$$L\{f(\lambda t)\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(\lambda t)dt.$$

Đổi biến $\lambda t = t_1, dt = \dfrac{1}{\lambda}dt_1$ ta được

$$L\{f(\lambda t)\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(\lambda t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{\lambda}t_1}f(t_1)dt_1 = \frac{1}{\lambda}F(\frac{p}{\lambda}).$$

□

Ví dụ 1.9.

$$L\{\sin\omega t\}(p) = \frac{1}{\omega}\frac{1}{(p/\omega)^2+1} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$