ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN MẠNH HÙNG

TỔNG LUỸ THỪA CỦA CÁC SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

Mã số: 60.46.05

Người hướng dẫn khoa học: TS. VŨ THẾ KHÔI

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Lời cảm ơn

Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập, và đã trang bị cho tôi đầy đủ kiến thức để làm nền tảng cho quá trình viết luận văn này.

Luận văn này được hoàn thành trong khóa 17 đào tạo Thạc sĩ của trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của TS. Vũ Thế Khôi, Viện Toán học. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý Thầy Cô trong hội đồng chấm luận văn đã dành thời gian đọc và đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, khoa Sau đại học, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã động viên, ủng hộ tôi cả về vật chất và tinh thần để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

Giới thiệu

Chúng ta đã biết đến các tổng sau từ những bài toán chứng minh bằng phương pháp quy nạp:
$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Ở đây, ta tổng quát hoá các tổng luỹ thừa có dạng như trên.
Với $n, k \in \mathbb{N}^*$, khi đó ta có tổng luỹ thừa: $\sigma_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$.

Theo ví dụ như trên chúng ta thấy rằng : $\sigma_3 = \sigma_1^2$ (1).

Khi đó đặt $f(x, y) = x^2 - y$ thì $f(\sigma_1(n), \sigma_3(n)) = 0 \quad \forall n$.
Nói cách khác tập hợp các điểm $\{(\sigma_1(n); \sigma_3(n))\}_{n=1,2,.....}$ đều nằm trên Parabol có phương trình: $y = x^2$.

Theo (1) thì σ_1 và σ_3 có mối liên hệ với nhau. Ở đề tài này, chúng ta sẽ thấy một cách tiếp cận khác để mở rộng (1) đến mức mô tả tất cả các mối quan hệ đa thức tồn tại giữa bất kì hai σ_i. Bằng phương pháp của hình học đại số chúng ta đi tìm các mối quan hệ giữa σ_i và σ_j hay tập hợp các điểm $\sum_{ij} = \{(\sigma_i(n), \sigma_j(n)) : n = 1, 2, ...\}$.

Bài luận văn này được viết dựa trên bài báo của Beardon, A. F., *Sums of Powers of Integers*, Amer. Math. Monthly, 103 (1996), no. 3, 201 - 213. Và các kết quả : từ Ví dụ 1.2.1 đến Ví dụ 1.2.5 ; Ví dụ 1.3.2 đến Ví dụ 1.3.8 ; Ví dụ 2.3.1 đến Ví dụ 2.3.6 ; Ví dụ 3.1.1 đến Ví dụ 3.1.4 và Ví dụ 4.2 ở trong luận văn là do chúng tôi tự tính toán.

Bố cục luận văn được chia thành 4 chương :

- **Chương 1:** Các số Bernoulli

  Trong chương này chúng tôi trình bày các kiến thức liên quan đến dãy số Bernoulli : định nghĩa, công thức xác định, đi tìm một số hạng đầu của dãy số Bernoulli và từ đó đưa ra các tính chất và hệ quả của chúng. Cuối cùng kết hợp với sự khai triển của hàm f(t) ở mệnh đề 1.2.7, ta khẳng định được rằng các $\sigma_k(n)$ là đa thức biến n có hệ số liên quan đến các số Bernoulli.

- **Chương 2 :** Các đa thức Faulhaber

  Trong chương này chúng tôi trình bày các sự biểu diễn của σ_k qua σ_1 trong cả hai trường hợp k lẻ và k chẵn. Dựa vào kết quả đó, tìm một số mối quan hệ ban đầu của σ_k và σ_1 ứng với những giá trị k cụ thể, và từ mối quan hệ này ta thu được các đa thức gọi là các đa thức Faulhaber.

- **Chương 3 :** Quan hệ đa thức giữa σ_i và σ_j.

  Ở đây chúng tôi trình bày mối liên quan giữa σ_i và σ_j bất kì, và cách tìm mối quan hệ này bằng phương pháp khử biến. Bằng cách tính toán thông thường theo phương pháp đại số chúng tôi tìm được các mối quan hệ này với các trường hợp k có giá trị nhỏ. Để có được một kết quả tổng quát, chúng tôi trình bày trong chương này một phương pháp dùng kết thức khử n hoặc σ_1 để tìm mối quan hệ giữa σ_i và σ_j.

- **Chương 4 :** Iđêan các đa thức và mối quan hệ giữa các kết thức

  Với những điều đã biết về kết thức ở chương 3, ta gọi kết thức thu được khi khử n từ σ_i và σ_j là R(f,g) và kết thức thu được khi khử σ_1 từ σ_i và σ_j là R*(f,g). Ở chương này chúng tôi trình bày mối quan hệ giữa hai kết thức này và lý thuyết về iđêan các đa thức.

Chương 1

Các số Bernoulli

1.1 Mệnh đề

Các $\sigma_k(n)$ là các đa thức bậc $k+1$ theo n.

*Chứng minh :*Ta chứng minh quy nạp theo k.

Trước hết ta xét một số giá trị ban đầu của k để cho thấy rằng mệnh đề đúng với các giá trị k này.

Với $k = 1$, ta có :

$\sigma_1(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ là đa thức bậc 2 theo n

Vậy mệnh đề đúng với $k = 1$.

Với $k = 2$, ta có:

$\sigma_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ là đa thức theo n có bậc là 3.

Vậy mệnh đề đúng với $k = 2$.

Bây giờ ta giả sử mệnh đề đúng với $\sigma_{k-1}(n)$ là đa thức có bậc là k.
Ta cần chứng minh đúng với $\sigma_k(n)$ có bậc $k+1$.

Xét $(n+1)^{k+1} - 1 = \sum\limits_{m=1}^{n} \left[(m+1)^{k+1} - m^{k+1} \right]$ (1.1)

$= \sum\limits_{m=1}^{n} \sum\limits_{r=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k+1 \\ r \end{array} \right) m^r = \sum\limits_{r=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k+1 \\ r \end{array} \right) \sum\limits_{m=1}^{n} m^r$

$= \sum\limits_{r=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k+1 \\ r \end{array} \right) \sigma_r(n) = \sum\limits_{r=0}^{k-1} \left(\begin{array}{c} k+1 \\ r \end{array} \right) \sigma_r(n) + (k+1)\sigma_k(n).$

Rút $\sigma_k(n)$ từ đẳng thức trên ta được $\sigma_k(n)$ là đa thức bậc $k+1$ theo n.

Vậy các $\sigma_k(n)$ là các đa thức bậc $k+1$ theo n. □

1.2 Định nghĩa

Cho dãy số B_n, $n \geq 0$ với số hạng đầu tiên $B_0 = 1$, các số hạng tiếp theo được cho bởi công thức truy hồi sau:

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m+1 \\ j \end{array} \right) B_j = 0.$$

Dãy số trên được gọi là dãy số Bernoulli.

(Xem tài liệu tham khảo [3]- trang 229)

Một số số hạng đầu của dãy số Bernoulli:

Ví dụ 1.2.1. *Với $m = 1$, ta có:* $\sum\limits_{j=0}^{1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ j \end{array} \right) B_j = 0$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) B_0 + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) B_1 = 0$

$\Leftrightarrow B_0 + 2B_1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 2B_1 = 0$

Vậy ta tính được $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.2.2. *Với $m = 2$, ta có:* $\sum\limits_{j=0}^{2} \left(\begin{array}{c} 3 \\ j \end{array} \right) B_j = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} B_0 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} B_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} B_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0 \Leftrightarrow 1 + 3(-\frac{1}{2}) + 3B_2 = 0$$

Vậy ta tính được $B_2 = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 1.2.3. *Với* $m = 3$, *ta có:* $\sum_{j=0}^{3} \begin{pmatrix} 4 \\ j \end{pmatrix} B_j = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} B_0 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} B_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} B_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} B_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4(-\frac{1}{2}) + 6\frac{1}{6} + 4B_3 = 0 \Leftrightarrow 4B_3 = 0 \Rightarrow B_3 = 0$$

Vậy ta tính được $B_3 = 0$.

Ví dụ 1.2.4. *Với* $m = 4$, *ta có:* $\sum_{j=0}^{4} \begin{pmatrix} 5 \\ j \end{pmatrix} B_j = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} B_0 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} B_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} B_2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} B_3 + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} B_4 = 0$$

$\Leftrightarrow B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 5(-\frac{1}{2}) + 10\frac{1}{6} + 5B_4 = 0$

$\Leftrightarrow 5B_4 = -\frac{1}{6} \Rightarrow B_4 = -\frac{1}{30}$.

Vậy ta tính được $B_4 = -\frac{1}{30}$.

Ví dụ 1.2.5. *Với* $m = 5$, *ta có:* $\sum_{j=0}^{5} \begin{pmatrix} 6 \\ j \end{pmatrix} B_j = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} B_0 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} B_1 + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} B_2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} B_3 + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} B_4 + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} B_5 = 0$$

$\Leftrightarrow B_0 + 6B_1 + 15B_2 + 20B_3 + 15B_4 + 6B_5 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 6(-\frac{1}{2}) + 15\frac{1}{6} + 15(-\frac{1}{30}) + 6B_5 = 0$

$\Leftrightarrow 6B_5 = 0 \Rightarrow B_5 = 0.$

Vậy ta tính được $B_5 = 0$.

Nhận xét 1.2.6. . *Từ các tính toán ở trên ta nhận thấy rằng các số Bernoulli ứng với hai số k lẻ là* $B_3 = B_5 = 0$. *Điều này cũng đúng cho sự mở rộng các số Bernoulli* $B_{2k+1} = 0$ *với* $k = 1, 2, \ldots.$.

Để chứng minh nhận xét mở rộng ở trên, ta đi xét mệnh đề sau và từ đó có được hệ quả.

Mệnh đề 1.2.7. . *Khi khai triển hàm số* $f(t) = \frac{t}{e^t-1}$ *theo chuỗi luỹ thừa quanh điểm* $t = 0$, *ta được:* $\frac{t}{e^t-1} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} B_m \left(\frac{t^m}{m!}\right)$.
Trong đó: $e^t = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}$.

Chứng minh :

Giả sử: $\frac{t}{e^t-1} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m \frac{t^m}{m!}$ (*). Ta sẽ chứng minh $b_m = B_m$.

Ta có: $e^t = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots..$

Suy ra $e^t - 1 = \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots.. = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!}$.

Từ (*) ta có: $t = (e^t - 1) \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m \frac{t^m}{m!} = \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\right) \left(\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m \frac{t^m}{m!}\right)$

$= \left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots..\right) \left(b_0 + b_1 \frac{t}{1!} + b_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots..\right).$

So sánh hai vế ta thấy:
Vế trái chỉ có thành phần bậc 1 theo t có hệ số là 1.
Từ đó suy ra vế phải chỉ tồn tại hệ số bậc 1 của t, còn các hệ số ứng với

thành phần bậc 2 trở lên theo t đều bằng 0.

+ Thành phần bậc 1 :

$b_0\frac{t}{1!} = b_0 t \Rightarrow b_0 = 1$

Vậy hệ số $b_0 = 1$.

+ Thành phần bậc 2 :

$$b_0\frac{t^2}{2!} + b_1\frac{t}{1!}\frac{t}{1!} = \left(\frac{b_0}{2} + b_1\right)t^2 \Rightarrow \frac{b_0}{2} + b_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2}$$

+ Thành phần bậc 3 :

$$b_0\frac{t^3}{3!} + b_1\frac{t}{1!}\frac{t^2}{2!} + b_2\frac{t^2}{2!}\frac{t}{1!} = \left(\frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right)t^3$$

$$\Rightarrow \frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{-\frac{1}{2}}{2} + \frac{b_2}{3} = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{6}$$

+ Tương tự đến thành phần bậc k là :

$$b_0\frac{t^0}{0!}\frac{t^k}{k!} + b_1\frac{t^1}{1!}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + b_2\frac{t^2}{2!}\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots\ldots + b_{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\frac{t^1}{1!}$$

$$= \frac{1}{k!}\left(b_0\frac{k!}{0!k!}t^k + b_1\frac{k!}{1!(k-1)!}t^k + \ldots.. + b_{k-1}\frac{k!}{(k-1)!1!}t^k\right)$$

$$= \frac{t^k}{k!}\sum_{j=0}^{k-1} b_j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} b_j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = 0\ ,\ \forall k = 2, 3, 4, \ldots..$$

Thay $k = m + 1$ ta được :

$$\sum_{j=0}^{m} b_j \begin{pmatrix} m+1 \\ j \end{pmatrix} = 0\ ,\ \forall k = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \Rightarrow B_j = b_j$$

Vậy $\frac{t}{e^t - 1} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!}$

Hệ quả 1.2.8. *Từ cách chứng minh mệnh đề trên, ta có thể kết luận được* $B_{2k+1} = 0,\ \forall k = 1, 2, 3, 4\ldots\ldots$

Chứng minh : Thật vậy, ta có : $\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum\limits_{m=2}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!}$