

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THU HUYỀN

ĐỊNH LÝ THÁC TRIỂN HỘI TỤ
ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ GIẢ CHỈNH HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 60.46.01

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS PHẠM VIỆT ĐỨC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Mở đầu	4
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị	6
1.1. Đa tạp hữu phức	6
1.1.1. Cấu trúc phức	6
1.1.2. Nhận xét	6
1.1.3. Ví dụ	7
1.1.4. Cấu trúc hữu phức	8
1.1.5. Đa tạp hữu phức	8
1.2. Không gian các dạng vi phân và ánh xạ đạo hàm	8
1.2.1. Định nghĩa	8
1.2.2. Định nghĩa	11
1.2.3. Định lý (Newlander - Nirenberg)	11
1.2.4. Nhận xét	11
1.3. Hàm đa điều hòa dưới	11
1.3.1. Định nghĩa	11
1.3.2. Định nghĩa	11
1.3.3. Mệnh đề	11
1.4. Giả khoảng cách Kobayashi trên đa tạp hữu phức	12
1.4.1. Định nghĩa	12
1.4.2. Bổ đề	13
1.4.3. Bổ đề	13
1.4.4. Định nghĩa	13
1.4.5. Tính chất	14
1.4.6. Hệ quả	14

1.4.7. Mệnh đề.....	15
1.4.8. Định nghĩa.....	15
1.4.9. Mệnh đề.....	15
1.4.10. Định nghĩa.....	15
1.4.11. Định nghĩa.....	15
1.4.12. Định lý.....	16
1.4.13. Định nghĩa.....	16
1.4.14. Định nghĩa.....	16
1.4.15. Họ đồng liên tục.....	16
1.4.16. Định lý Ascoli đối với họ đồng liên tục.....	17
1.5. Giả metric vi phân Royden-Kobayashi trên đa tạp hầu phức ..	17
1.5.1. Mệnh đề.....	17
1.5.2. Định nghĩa.....	18
1.5.3. Mệnh đề.....	18
1.5.4. Ví dụ.....	18
1.5.5. Định nghĩa.....	19
1.5.6. Nhận xét.....	19
1.6. Định lý tham số hoá của Brody.....	19
Chương 2. Một số định lý thác triển hội tụ đối với ánh xạ giả chỉnh hình	22
2.1. Tổng quát hoá định lý Picard lớn.....	22
2.1.1. Quỹ tích suy biến của giả khoảng cách Kobayashi	22
2.1.2. Thác triển các đường cong J -chỉnh hình.....	26
2.1.3. Sự thác triển trên các đa tạp số chiều cao.....	30
2.2. Một số định lý thác triển hội tụ kiểu Nuguchi	32
2.2.1. Định lý.....	32
2.2.2. Định lý.....	34
2.2.3. Định lý.....	36
2.2.4. Bổ đề.....	37
2.2.5. Bổ đề.....	38

2.2.6. Hệ quả.....	39
2.2.7. Định lý.....	39
Kết luận	41
Tài liệu tham khảo	42

Mở đầu

Một trong những ứng dụng quan trọng của các không gian phức hyperbolic là bài toán thác triển ánh xạ chỉnh hình trong giải tích phức. Việc mở rộng định lý Picard lớn và nghiên cứu các định lý thác triển hội tụ kiểu Noghuchi đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu trong cả trường hợp đa tạp phức và đa tạp hầu phức.

Mục đích của luận văn là trình bày một số kết quả gần đây của F. Haggui và A. Khalfallah[H-K] theo hướng nghiên cứu nói trên.

Nội dung của luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Trình bày các kiến thức chuẩn bị để phục vụ cho việc trình bày các kết quả chính của luận văn trong chương 2. Cụ thể là: Đa tạp hầu phức, giả khoảng cách Kobayashi trên đa tạp hầu phức, giả metric vi phân Royden-Kobayashi trên đa tạp hầu phức.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn. Phần đầu chương trình bày một số kết quả về thác triển các đường cong giả chỉnh hình và một tiêu chuẩn cho tính nhúng hyperbolic của các đa tạp hầu phức. Phần tiếp theo là một số định lý thác triển hội tụ kiểu Noghuchi đối với các ánh xạ giả chỉnh hình giữa các đa tạp hầu phức.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình, chu đáo của PGS.TS Phạm Việt Đức. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy của mình, người đã chỉ bảo và hướng dẫn tôi trong suốt thời gian tôi học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới toàn thể các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học,

Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội đã tận tình giảng dạy động viên tôi trong suốt thời gian học tập. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Khoa Toán, Khoa Sau Đại học, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Sở GD - ĐT Tuyên Quang, những bạn bè đồng nghiệp và đặc biệt là người thân trong gia đình đã động viên, ủng hộ tôi về mọi mặt để tôi có thể hoàn thành khóa học của mình.

Trong quá trình làm luận văn chắc không thể tránh khỏi những sai sót, rất mong độc giả đóng góp ý kiến. Tôi xin trân trọng cảm ơn.

Thái nguyên, tháng 8 năm 2011

TÁC GIẢ

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Đa tạp hầu phức

1.1.1. Cấu trúc phức

Giả sử V là $\mathbb{R}$ -không gian vectơ và $J : V \longrightarrow V$ là $\mathbb{R}$ -đẳng cấu. J được gọi là một *cấu trúc phức* trên V nếu

$$J^2 := J \circ J = -Id.$$

Giả sử J là cấu trúc phức trên $\mathbb{R}$ -không gian vectơ V , khi đó ta có thể xây dựng V thành $\mathbb{C}$ -không gian vectơ bằng cách đặt

$$(\alpha + i\beta)v := \alpha v + \beta J(v) = \alpha v + \beta Jv.$$

Giả sử V là $\mathbb{C}$ -không gian vectơ có cơ sở là $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Xem V là $\mathbb{R}$ -không gian vectơ $V_{\mathbb{R}}$, xét

$$J : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$$v \longmapsto Jv = iv.$$

Khi đó J là cấu trúc phức trên $V_{\mathbb{R}}$ và không gian phức mà nó cảm sinh ra trùng với không gian vectơ phức V ban đầu.

1.1.2. Nhận xét

$V_{\mathbb{R}}$ có $\mathbb{R}$ -cơ sở là $\{v_1, v_2, \dots, v_n, Jv_1, Jv_2, \dots, Jv_n\}$.

1.1.3. Ví dụ

a)

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^n &= \{(z_1, \dots, z_n) : z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}\} \\ &\cong \mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)\}.\end{aligned}$$

$J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ cho bởi:

$$J((x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)) = (-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n).$$

Khi đó J là cấu trúc phức trên $\mathbb{R}^{2n}$.

b) Giả sử M là đa tạp phức m chiều. Khi đó nó cảm sinh ra M_0 là đa tạp thực nhẵn $2m$ chiều.

Gọi $T_x(M_0)$ là không gian tiếp xúc thực của M_0 tại x và gọi $T_x(M)$ là không gian tiếp xúc phức của M tại x .

Giả sử (U, h) là một bản đồ địa phương của M quanh x .

Ta có

$$h : U \longrightarrow U' \subset \mathbb{C}^m$$

$h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$, cảm sinh ra $\tilde{h} : U \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ cho bởi

$$\tilde{h}(x) = (\operatorname{Re} h_1(x), \operatorname{Im} h_1(x), \dots, \operatorname{Re} h_m(x), \operatorname{Im} h_m(x)).$$

Ta có $(U, \tilde{h})$ là một bản đồ địa phương của M_0 quanh x .

Gọi

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m} \Big|_x \right\} \text{ là } \mathbb{C}\text{-cơ sở của } T_x(M).$$

Nó cảm sinh ra

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x \right\}_{j=1}^n \text{ là } \mathbb{R}\text{-cơ sở của } T_x(M_0).$$

Xét

$$J : T_x(M_0) \longrightarrow T_x(M_0)$$

cho bởi

$$v = \alpha_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x + \beta_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_x + \dots + \alpha_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_x + \beta_n \cdot \frac{\partial}{\partial y_n} \Big|_x \in T_x(M_0)$$

thì

$$J_v = (-\beta_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_x + \dots + (-\beta_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_x + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y_n} \Big|_x.$$

Khi đó J là cấu trúc phức trên $T_x(M_0)$.

1.1.4. Cấu trúc hầu phức

Giả sử M là đa tạp vi phân $2n$ chiều. Gọi $\pi : TM \rightarrow M$ là phân thớ tiếp xúc thực.

Giả sử $J : T(M) \rightarrow T(M)$ là một tự đẳng cấu của $T(M)$ liên kết với ánh xạ đồng nhất trên M thỏa mãn

$$\forall x \in M : J_x = J \Big|_{T_x(M)} : T_x(M) \rightarrow T_x(M)$$

là cấu trúc phức trên $\mathbb{R}$ -không gian vectơ $T_x(M)$.

Khi đó J được gọi là *cấu trúc hầu phức* trên M .

1.1.5. Đa tạp hầu phức

(M, J) được gọi là một *đa tạp hầu phức* nếu M là một đa tạp vi phân chẵn $2n$ chiều được trang bị một cấu trúc hầu phức J .

1.2. Không gian các dạng vi phân và ánh xạ đạo hàm

1.2.1. Định nghĩa

Giả sử M là đa tạp vi phân m chiều.

Đặt

$$T(M)_{\mathbb{C}} = T(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Tương tự ta định nghĩa

$$T^*(M)_{\mathbb{C}} = T^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Từ đó ta định nghĩa tích ngoài

$$\Lambda T^*(M)_{\mathbb{C}} \text{ và } \varepsilon^r(M)_{\mathbb{C}} = \varepsilon(M, \Lambda^r T^*(M)_{\mathbb{C}}).$$

Gọi $\varepsilon^r(M)$ là không gian các dạng vi phân bậc r với giá trị phức. Tức là với $\varphi \in \varepsilon^r(M)$, ta có

$$\varphi(x) = \sum'_{|I|=r} \varphi_I(x) dx_I$$

trong đó φ_I là hàm giá trị phức và

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} = \sum'_{|I|=r}.$$

Khi đó ta có dãy

$$\varepsilon^0(M) \xrightarrow{d} \varepsilon^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \varepsilon^m(M) \longrightarrow 0 \text{ với } d^2 = 0.$$

Giả sử (M, J) là đa tạp hầu phức, khi đó

$$J : T_x(M)_{\mathbb{C}} \rightarrow T_x(M)_{\mathbb{C}}$$

là đẳng cấu trên phân thớ vectơ phức $T(M)_{\mathbb{C}}$.

Ta đặt

$T^{1,0}(M)$ là phân thớ ứng với giá trị riêng i của J .

$T^{0,1}(M)$ là phân thớ ứng với giá trị riêng $-i$ của J .

Xét đẳng cấu liên hợp

$$Q : T(M)_{\mathbb{C}} \longrightarrow T(M)_{\mathbb{C}}$$

được cho trên mỗi thớ bởi $Q(v_x) = iv_x$; $v_x \in T_x M_{\mathbb{C}}$.

Khi đó Q cảm sinh ra đẳng cấu từ $T^{1,0}(M)$ tới $T^{0,1}(M)$.