ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN TIẾN THỊNH

GIẢ THUYẾT ERDÖS - SZEKERES VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2011

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN TIẾN THỊNH

GIẢ THUYẾT ERDÖS - SZEKERES VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC TOÁN HỌC
Chuyên ngành : Toán giải tích
Mã số: 60.46.01

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. Tạ Duy Phượng

Thái Nguyên - 2011

Mục lục

Chương 1. Giả thuyết Erdös-Szekeres và một số bài toán mở rộng 4

1.1. Tổng quan về giả thuyết Erdös – Szekeres 4

1.1.1. Lịch sử của bài toán Erdös-Szekeres 4

1.1.2. Bài toán Erdös-Szekeres cho trường hợp các điểm ở vị trí bất kì 9

1.2. Lời giải Bài toán ES(n) cho trường hợp $n = 3,4,5$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ 10

1.2.1. Lời giải Bài toán ES(n) cho trường hợp $n = 3$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ 14

1.2.2. Lời giải Bài toán ES(n) cho trường hợp $n = 4$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ 15

1.2.3. Lời giải Bài toán ES(n) cho trường hợp $n = 5$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ 17

Chương 2. Bài toán Erdös về sự tồn tại đa giác lồi rỗng 25

2.1. Lịch sử Bài toán Erdös về đa giác lồi rỗng 25

2.1.1. Đa giác lồi rỗng 25

2.1.2. Đa giác lồi rỗng suy rộng 27

2.2. Lời giải bài toán H(n) cho trường hợp $n = 3,4,5$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ 28

2.2.1. Chứng minh công thức H(n) cho trường hợp $n = 3$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ ... 32

2.2.2. Chứng minh công thức H(n) cho trường hợp $n = 4$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ ... 32

2.2.3. Chứng minh công thức H(n) cho trường hợp $n = 5$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ ... 35

Chương 3. Chứng minh giả thuyết Erdös-Szekeres với trường hợp $n = 6$ trong một số trường hợp riêng. 55

3.1. Giả thuyết Erdös-Szekeres với trường hợp $n = 6$. 55

3.2. Chứng minh giả thuyết Erdös-Szekeres với trường hợp $n = 6$ trong một số trường hợp riêng. 56

Kết luận 63

Tài liệu tham khảo 64

MỞ ĐẦU

Giả thuyết Erdös-Szekeres được đề cập đến từ rất sớm (vào năm 1935), xuất phát từ bài toán của Esther Klein với phát biểu rất ngắn gọn:

- *Giả thuyết Erdös-Szekeres* : Mọi tập hợp trên mặt phẳng gồm không ít hơn $2^{n-2}+1$ điểm ở vị trí tổng quát (không có ba điểm nào thẳng hàng) đều chứa n điểm là đỉnh của đa giác lồi.

- Bất chấp sự đơn giản trong phát biểu, sau ba phần tư thế kỉ, giả thuyết Erdös-Szekeres mới được chứng minh cho các trường hợp n = 3, 4, 5. Gần đây (năm 2006) trường hợp n = 6 mới được chứng minh nhờ máy tính. Sau 75 năm, rất nhiều kết quả mới đã làm phong phú thêm giả thuyết Erdös-Szekeres.

- Luận văn *Giả thuyết Erdös-Szekeres và một số bài toán liên quan* có mục đích trình bày chứng minh một số kết quả đã biết trong bài toán (giả thuyết) Erdös-Szekeres cho hai bài toán mở rộng. Bài toán thứ nhất là mở rộng của bài toán Erdös-Szekeres khi bỏ điều kiện các điểm ở vị trí tổng quát (không có ba điểm nào thẳng hàng), tức là các điểm ở vị trí bất kì. Bài toán thứ hai là bài toán Erdös về sự tồn tại đa giác lồi rỗng trong tập hợp các điểm bất kì trên mặt phẳng.

- Luận văn gồm ba Chương.

- *Chương 1*: Trình bày tổng quan về giả thuyết Erdös-Szekeres. Các kiến thức sử dụng trong luận văn. Chứng minh công thức $\mathrm{ES}(n) = 2^{n-2}+1$ với $n = 3,4,5$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ trong mặt phẳng.

- *Chương 2*: Chứng minh công thức tính H(n) với $n = 3,4,5$ với tập điểm ở vị trí bất kỳ trong mặt phẳng.

- *Chương 3*: Trình bày lại một cách tóm lược công trình của Knut Dehnhardt, Heiko Harboth và Zsolt Lángi [9] đã chứng minh cho giả thuyết Erdös-Szekeres với trường hợp $n = 6$ trong một số trường hợp riêng mà không sử dụng máy tính.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS TS Tạ Duy Phượng. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn thầy hướng dẫn đã tận tình giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình tập dượt nghiên cứu và viết luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo trường Đại học sư phạm thuộc Đại học Thái Nguyên và các thầy cô giáo Viện Toán học Việt Nam đã tận tâm giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học.

Đồng thời tác giả xin chân thành cảm ơn Trường Cao đẳng Công nghiệp Nam Định, nơi tác giả đang công tác, các đồng nghiệp, gia đình và bạn bè đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện về mọi mặt trong quá trình tác giả học tập.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2011

Chương 1

Giả thuyết Erdös-Szekeres và một số bài toán mở rộng

Trong chương này chúng tôi phát biểu giả thuyết Erdös-Szekeres cho trường hợp các điểm ở vị trí tổng quát và một mở rộng của bài toán Erdös-Szekeres cho trường hợp các điểm ở vị trí bất kì, đồng thời cũng trình bày chứng minh công thức Erdös-Szekeres trong trường hợp $n = 3, 4, 5$ với tập hợp điểm trên mặt phẳng ở vị trí bất kỳ.

1.1. Tổng quan về giả thuyết Erdös – Szekeres

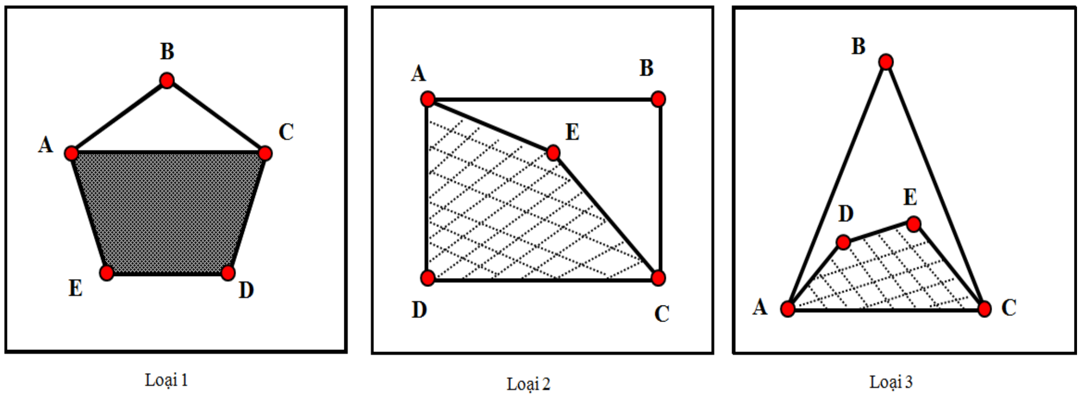
1.1.1. Lịch sử của bài toán Erdös-Szekeres

Năm 1933, Esther Klein đã phát biểu và chứng minh bài toán sau đây.

Bài toán 1.1: Với năm điểm cho trước trong mặt phẳng ở vị trí tổng quát (không có ba điểm nào thẳng hàng), bao giờ ta cũng tìm được bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

Dưới đây là chứng minh của Klein.

Xét đa giác lồi lớn nhất chứa tất cả năm điểm ở vị trí tổng quát. Chỉ có ba khả năng khác nhau sau đây xảy ra:



Hình 1.1: Tập năm điểm ở vị trí tổng quát luôn tồn tại 4 điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

Trường hợp thứ nhất (xem hình1.1-loại 1): Bao lồi của năm điểm là một ngũ giác. Khi ấy mọi bộ bốn điểm từ năm điểm ấy đều tạo thành tứ giác lồi (điểm còn lại nằm ngoài tứ giác lồi đó). Vậy ta có tứ giác lồi không chứa điểm nào bên trong. Erdös gọi các tứ giác này là tứ giác lồi rỗng.

Trường hợp thứ hai (xem hình 1.1-loại 2): Bao lồi là tứ giác *ABCD* chứa một điểm *E* ở bên trong (tứ giác lồi *ABCD* chứa duy nhất một điểm *E* ở bên trong được gọi là *tứ giác lồi gần rỗng*). Kẻ đường chéo *AC* của tứ giác thì do ba điểm bất kì trong năm điểm đã cho không thẳng hàng nên điểm *E* phải thuộc tam giác *ABC* hoặc tam giác *ACD*. Trong hình 1.1-loại 2 thì điểm *E* nằm ở bên trong tam giác ABC (bên ngoài tam giác *ACD*). Khi ấy *AECD* là tứ giác lồi rỗng. Như vậy, trong trường hợp này ta có một tứ giác lồi rỗng *AECD* và một tứ giác lồi gần rỗng *ABCD*.

Trường hợp cuối cùng (xem hình 1.1-loại 3): Bao lồi là tam giác *ABC*, hai điểm *D* và *E* còn lại nằm bên trong tam giác. Do không có ba điểm nào thẳng hàng nên đường thẳng đi qua hai điểm D và E sẽ chia mặt phẳng chứa tam giác thành hai phần sao cho một nửa mặt phẳng phải chứa hai đỉnh của tam giác. Hai đỉnh này cùng với hai điểm thuộc phần trong tam giác tạo thành một tứ giác lồi rỗng.

Từ quan sát trên, E. Klein đã đề nghị một bài toán tổng quát sau đây.

Bài toán 1.2 : Với mỗi số tự nhiên $n \geq 3$, hãy xác định số nguyên dương $N(n)$ nhỏ nhất sao cho mọi tập có tối thiểu $N(n)$ điểm trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát chứa n điểm tạo thành một đa giác lồi n đỉnh.

Bài toán 1.2 được phát biểu trong [15] và sau này được gọi là Bài toán Erdös-Szekeres.

Trong [15], Bài toán 1.2 đã được tách ra thành hai bài toán:

Bài toán 1.2a : Tồn tại hay không tồn tại số $N(n)$.

Bài toán 1.2b : Nếu số $N(n)$ tồn tại thì hãy xác định $N(n)$ như một hàm của n, tức là tìm số điểm $N(n)$ nhỏ nhất mà từ đó có thể chọn ra được n điểm tạo thành đa giác lồi n đỉnh.

Trong [15], đã trình bày chứng minh sự tồn tại số $N(n)$ bằng hai cách hoàn toàn khác nhau:

- *Cách thứ nhất*: Do Szekeres chứng minh không lâu sau khi E. Klein phát biểu bài toán, dựa trên định lí Ramsey (Szekeres và các thành viên khác trong nhóm sinh viên Budapest lúc đó không ai biết định lí Ramsey, nhưng để giải bài toán của Klein đưa ra, Szekeres đã phát hiện lại và sử dụng định lí này), từ đó ta có bất đẳng thức $N(n) \leq R_4(n,5)$, trong đó $R_4(n,5)$ là số Ramsey. Tuy nhiên, đánh giá này là quá lớn so với thực tế. Thí dụ, với $n = 5$ thì $N(5) \leq 2^{10000}$, quá xa so với thực tế $N(5) = 9$.

- *Cách thứ hai*: Do Erdös chứng minh nhờ kết hợp hình học với lí thuyết tổ hợp và kết quả ta được một đánh giá tốt hơn $N(n) \le C_{2n-4}^{n-2} + 1$ vào năm 1935 (xem chi tiết hơn trong [15]).

Sau 63 năm Chung và Graham (xem [8]) đã chứng minh được

$$N(n) \le C_{2n-4}^{n-2}, \forall\, n \ge 3.$$

Ngay sau đó Kleitman và Pachter (xem [10]) đã chứng minh được

$$N(n) \le C_{2n-4}^{n-2} + 7 - 2n, \forall\, n \ge 3$$

Cũng trong năm đó (1998) Tóth và Valtr (xem [19]) đã chứng minh được

$$N(n) \le C_{2n-5}^{n-2} + 2, \forall\, n \ge 3.$$

Sau đó 7 năm (2005) Tóth và Valtr (xem [20]) đã chứng minh được

$$N(n) \le C_{2n-5}^{n-2} + 1, \forall\, n \ge 5.$$

Như vậy đánh giá tốt nhất hiện nay là của Tóth và Valtr, tuy nhiên với $n = 6$ thì $C_7^4 + 1 = 36$ còn cách khá xa so với chứng minh của Szekeres và Peters năm 2006 là $N(6) = 17$, xem [18].

Theo [11], năm (1960-1961) P. Erdös and G. Szekeres đã xây dựng được trường hợp tổng quát cho tập hợp chứa 2^{n-2} điểm ở vị trí tổng quát (không có ba điểm bất kỳ nào thẳng hàng) không chứa n-giác lồi. Do đó cận dưới của $N(n)$ là không thể giảm được. Như vậy ta có:

$$2^{n-2} < N(n) \le C_{2n-5}^{n-2} + 2$$

Vậy với $n = 5$, ta xét bài toán sau:

Bài toán 1.3 : Với chín điểm cho trước ở vị trí tổng quát trong mặt phẳng (tức là không có ba điểm nào thẳng hàng) bao giờ ta cũng tìm được năm điểm tạo thành một ngũ giác lồi.

Bài toán này lần đầu tiên được Đoàn Hữu Dũng giải và đăng trên tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ năm* 1967, xem[1]. Trên các tài liệu nước ngoài, công thức $N(5) = 9$ lần đầu tiên được Kalbfleisch, Kalbfleisch và Stanton chứng minh năm 1970. Tuy nhiên, cách chứng minh trên là khá cồng kềnh, do đó công thức $N(5) = 9$ đã được Bonnice [7] năm 1974 và Lovász năm 1979 chứng minh theo cách đơn giản hơn. Cách chứng minh của Bonnice về cơ bản trùng với cách chứng minh của Đoàn Hữu Dũng. Như vậy, với $n = 5$ công thức $N(5) = 9$ đã được chứng minh ngắn gọn bởi Đoàn Hữu Dũng vào năm 1967 [1] và Bonnice vào năm 1974 [7].

Dựa trên các đẳng thức $N(3) = 3$ và $N(4) = 5$ Erdös và Szekeres đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Erdös-Szekeres (1935): Mọi tập hợp trên mặt phẳng gồm không ít hơn $2^{n-2} + 1$ điểm ở vị trí tổng quát (không có ba điểm nào thẳng hàng) đều chứa n điểm là đỉnh của n giác lồi.

Bất chấp sự đơn giản trong phát biểu, sau ba phần tư thế kỉ, giả thuyết Erdös - Szekeres chỉ mới được chứng minh cho các trường hợp $n = 3, 4, 5$. Trường hợp $n = 6$ mới được Szekeres và Peters chứng minh năm 2006 nhờ máy tính (xem [18]) và Knut Dehnhardt, Heiko Harborth, and Zsolt Lángi, V.A.Koshelev chứng minh cho một số trường hợp riêng (không dùng máy tính) năm 2009. Giả thuyết Erdös - Szekeres có liên quan chặt chẽ với các lĩnh vực khác của toán-tin học (lí thuyết Ramsey, lí thuyết đồ thị, hình học tổ hợp,...). Giả thuyết Erdös - Szekeres cũng được gọi là Bài toán Erdös - Szekeres.