ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

TRẦN THỊ THU HƯƠNG

VỀ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ HỢP THÀNH GIỮA CÁC KHÔNG GIAN METRIC ĐẦY ĐỦ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2011

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

TRẦN THỊ THU HƯƠNG

VỀ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ HỢP THÀNH GIỮA CÁC KHÔNG GIAN METRIC ĐẦY ĐỦ

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - Năm 2011

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Hà Trần Phương, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong tổ bộ môn Giải tích trường ĐHSPTN đã truyền thụ cho tôi những kiến thức quan trọng, tạo điều kiện thuận lợi, cho tôi những ý kiến đóng góp quý báu và giúp đỡ tôi nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn trường ĐHSPTN và khoa Toán là nơi mà tôi đã được đào tạo và hoàn thành luận văn thạc sỹ khoa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn trường THPT ATK Tân Trào - Sơn Dương, Tuyên Quang nơi tôi đang công tác đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập nghiên cứu.

Tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè là nguồn động viên lớn lao trong quá trình tôi làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2011

Tác giả

Trần Thị Thu Hương

Mục lục

Mở đầu

Vấn đề nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất và cấu trúc điểm bất động của ánh xạ đơn trị hay đa trị là một vấn đề thời sự, có lịch sử lâu dài, thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà Toán học trên thế giới: Brouwer, Banach, Schauder, Tikhonov,... và đạt được nhiều kết quả quan trọng. Cho X là một không gian, $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ (đơn trị). Vấn đề đặt ra là: với những điều kiện nào của X và T để có thể khẳng định sự tồn tại điểm $x_0 \in X$ sao cho $Tx_0 = x_0$? Điểm x_0 như vậy gọi là *điểm bất động* của ánh xạ T. Khái niệm này được mở rộng tự nhiên cho ánh xạ đa trị.

Những định lí điểm bất động nổi tiếng đã xuất hiện từ đầu thế kỷ XX, trong đó phải kể đến Nguyên lí điểm bất động Brouwer (1912) và Nguyên lí ánh xạ co Banach (1922), trong đó Nguyên lí ánh xạ co Banach được đánh giá là định lí điểm bất động đơn giản nhất và được sử dụng rộng rãi nhất. Về sau, các kết quả kinh điển này đã được mở rộng ra nhiều lớp ánh xạ và các không gian khác nhau, thu được nhiều kết quả quan trọng và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Các kết quả nghiên cứu về điểm bất động của ánh xạ tập chung vào các hướng: nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất (cấu trúc) của điểm bất động, các phương pháp tìm điểm bất động và nghiên cứu ứng dụng của định lý điểm bất động trong các lĩnh vực khác khau của toán học, đặc biệt trong toán học ứng dụng và các bài toán kinh tế .... Các công trình theo hướng nghiên cứu này được tập hợp lại dưới một tên chung: "Lý thuyết điểm bất động" và ngày càng được phát triển mạnh mẽ.

Thời gian gần đây, các định lí điểm bất động còn được mở rộng cho một họ ánh xạ giữa các không gian metric. Cho $X_1, ..., X_p$ là một họ các không gian metric, $f_1 : X_1 \to X_2, ..., f_{p-1} : X_{p-1} \to X_p$ và $f_p : X_p \to X_1$ là một họ các ánh xạ. Vấn đề đặt ra là với những điều kiện nào của các không gian X_j và ánh xạ f_j thì các ánh xạ hợp thành $f_{j-1}...f_{j+1}f_j : X_j \to X_j$ có điểm bất động. Những nghiên cứu đầu tiên theo hướng này phải kể đến công trình của N. P. Nung (xem [3]), Ông nghiên cứu vấn đề trên với $p = 3$ và có xem xét đến tính chất liên tục của các ánh xạ. Trong [8], các tác giả xem xét với $p = 3$ và tính chất liên tục của các ánh xạ được bỏ qua. L. Kikina và K. Kikina khảo sát với $p = 4$ trong [5].... Trong luận văn này, chúng tôi trình bày tổng quan các kết quả nghiên cứu và chứng minh chi tiết kết quả L. Kikina và K. Kikina trong [5]. Ngoài ra chúng tôi chứng minh một kết quả nghiên cứu mới của chúng tôi về định lý điểm bất động trong trường hợp tổng quát p không gian metric đầy đủ. Khi đặc biệt hóa $p = 4$, kết quả của chúng tôi mạnh hơn kết quả của L. Kikina và K. Kikina trong [6].

Luận văn gồm hai chương: Chương 1 dành cho việc trình bày một số vấn đề cơ sở của không gian metric, không gian Banach, Nguyên lý ánh xạ co Banach và một số cải tiến của nó. Trong Chương 2, chúng tôi trình bày về các dạng định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa các không gian metric đầy đủ.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian metric, không gian Banach, ánh xạ Lipschitz và Nguyên lý ánh xạ co Banach về điểm bất động.

1.1 Không gian metric và không gian định chuẩn

1.1.1 Một số khái niệm

Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.1. Cho X là một tập khác rỗng, trên X ta trang bị hàm số

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \rho(x, y)$$

thỏa mãn các điều kiện sau

(1) $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(2) $\rho(x, y) = \rho(x, y), \forall x, y \in X,$

(3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X.$

Khi đó ρ được gọi là một *metric* hay *khoảng cách* trên X và cặp (X, ρ) gọi là một *không gian metric*. Mỗi phần tử của X sẽ được gọi là một *điểm*, $\rho(x, y)$ gọi là *khoảng cách giữa hai điểm* x, y trên X.

Định nghĩa 1.2. Cho X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, *chuẩn* trên X là hàm số

$$\begin{aligned} \|.\| : X &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{aligned} &1) \quad \|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ &2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \\ &3) \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in X$ và $\lambda \in \mathbb{K}$.

Cặp $(X, \|.\|)$, trong đó X là một không gian tuyến tính, $\|.\|$ là một chuẩn trên X, gọi là một *không gian định chuẩn* (hay còn gọi là *không gian tuyến tính định chuẩn*).

Với một không gian định chuẩn $(X, \|.\|)$, ta dễ dàng chứng minh được hàm

$$\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

xác định bởi $\rho(x, y) = \|x - y\|$, với $x, y \in X$, là một metric trên X, gọi là metric sinh bởi chuẩn. Như vậy, không gian định chuẩn là một không gian metric.

Ví dụ 1. Lấy $X = \mathbb{R}$ hoặc $X = \mathbb{C}$, đặt

$$\|x\| = |x|, \quad \text{với } x \in X.$$

Khi đó $(X, \|.\|)$ là một không gian định chuẩn. Do đó (X, ρ) sẽ là một không gian metric với $\rho(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in X)$.

Ví dụ 2. Lấy $X = \mathbb{R}^n$ với $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, đặt

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}.$$

Khi đó ρ thỏa mãn điều kiện (1) và (2). Ta chứng minh điều kiện (3):

Giả sử $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n), z = (z_1, ..., z_n)$ là ba phần tử tùy ý trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\rho^2(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.|y_k - z_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|^2 \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2.\sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|^2} + \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|^2 \\
&= \left\{ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|^2} \right\}^2 \\
&= (\rho(x,y) + \rho(y,z))^2 .
\end{aligned}$$

Điều đó suy ra $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$. Như vậy ρ là một metric trên $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^n$ với metric xác định như trên là một không gian metric.

Ta cũng dễ chứng minh được $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, trong đó

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad \text{với } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

là một không gian định chuẩn.

Sự hội tụ trong không gian metric

Định nghĩa 1.3. Cho (X, ρ) là một không gian metric, $\{x_n\}$ là một dãy các phần tử của X, ta nói $\{x_n\}$ *hội tụ* đến $x_0 \in X$ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ hoặc $x_n \to x_0$, x_0 gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

Ví dụ 3. Trong không gian $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0,$$

đây là sự hội tụ mà ta đã biết trong giải tích cổ điển.

Ví dụ 4. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, giả sử $\{x_k = (x_1^k, ..., x_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$, $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} x_k = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i^k - x_i^0|^2\right)^{\dfrac{1}{2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_i^k = x_i^0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Vì vậy ta thường gọi sự hội tụ trong không gian $\mathbb{R}^n$ là sự hội tụ theo tọa độ.

Tập hợp đóng và tập hợp mở trong không gian metric

Định nghĩa 1.4. Giả sử (X, ρ) là một không gian metric, $x_0 \in X$ và $r > 0$.Tập

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$$

gọi là *hình cầu mở* tâm x_0 bán kính r.Tập

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$$

gọi là *hình cầu đóng* tâm x_0 bán kính r.

Định nghĩa 1.5. Giả sử A là một tập con của không gian metric (X, ρ), điểm $x_0 \in A$ được gọi là *điểm trong* của A nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x_0, r) \subset A$. Tập tất cả các điểm trong của A được gọi là *phần trong* của A và kí hiệu $intA$ hoặc A^o.

Nhận xét 1.1. *Trong không gian metric (X, ρ), $X, \emptyset$ là các tập mở. Hình cầu $B(x_0, r)$ là một tập mở vì với mọi $x \in B(x_0, r)$ luôn tồn tại $r_1 = r - \rho(x_0, x) > 0$ sao cho $B(x, r_1) \subset B(x_0, r)$, tức là mọi điểm của $B(x_0, r)$ đều là điểm trong*

Định nghĩa 1.6. Một tập con A trong không gian metric (X, ρ) được gọi là đóng nếu phần bù của nó $C_X A$ là tập mở.

Hiển nhiên X và $\emptyset$ là những tập đóng trong không gian metric (X, ρ). Dễ dàng chứng minh được mọi hình cầu đóng là một tập đóng.